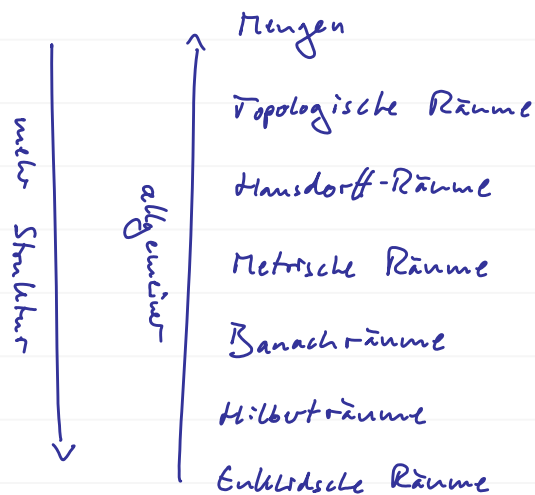


Ausblick: Topologische Räume

Topologische Räume sind der allgemeinste Rahmen in dem wir Grundbegriffe der Analysis wie Konvergenz, Stetigkeit & Kompaktheit definieren können.



Def.: Eine „Topologie“ \mathcal{T} auf einer Menge X ist eine Menge von Teilmengen von X , so dass

$$(i) \quad \emptyset, X \in \mathcal{T}$$

$$(ii) \quad U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cup V \in \mathcal{T}$$

$$(iii) \quad (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ mit } U_\lambda \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$$

• (X, \mathcal{T}) heißt „topologischer Raum“ & die Elemente von \mathcal{T} heißen „offene Mengen“.

• $A \subseteq X$ heißt „abgeschlossen“ wenn $X \setminus A$ offen ist.

• Der „Abschluss“ \bar{A} von $A \subseteq X$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.

• $A \subseteq X$ heißt „dicht“ in X , wenn $\bar{A} = X$.

Bsp.: • Durch eine Metrik induzierte Topologie:

$$\text{Sei } (X, d) \text{ metrischer Raum \& } B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}, r > 0$$

dann ist $\mathcal{T} := \{V \subseteq X \mid \forall x \in V \exists r > 0: B_r(x) \subseteq V\}$ die übliche („natürliche“) Topologie.

• „Diskrete Topologie“: $\mathcal{T} := \{V \subseteq X\}$

• „Triviale Topologie“: $\mathcal{T} := \{X, \emptyset\}$

Def.: Ein top. Raum (X, \mathcal{T}) heißt „Hausdorff-Raum“ wenn $\forall x, y \in X$:

$$x \neq y \Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{T}: x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

Bem.: Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum, da wir für U & V einfach $B_r(x)$ bzw. $B_r(y)$ mit $r = \frac{1}{2}d(x, y)$ nehmen können.

Def.: (Konvergenz) Ist (X, τ) ein topologischer Raum, dann heißt eine Folge $x_n \in X$ "Konvergent" gegen x wenn $\forall U \in \tau$:

$$x \in U \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N: x_n \in U$$

Def.: (Stetigkeit) Sind (X, τ) und $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ topologische Räume, dann heißt $f: X \rightarrow \tilde{X}$ "stetig" wenn

$$U \in \tilde{\tau} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau$$

Def.: (Kompaktheit) Ist (X, τ) ein topologischer Raum, dann heißt $A \subseteq X$ "Kompakt" wenn jede offene Überdeckung eine endliche Überdeckung beinhaltet. D.h. für jede Familie $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$ mit $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supseteq A$ existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ mit $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} U_{\lambda_i} \supseteq A.$$

Bemerkungen: • Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind wieder kompakt

- In metrischen Räumen gilt:
Kompaktheit \Leftrightarrow Folgenkompaktheit (d.h. jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge)