Ausblick: Topologische Räume

Topologische Räume sind der allgemeinste Rahmen in dem wir Grundbegriffe der Analysis wie Konvergenz, Stetigkeit & Kompaktheit definieren können.

mehr Struktur ↓

allgemeiner ↑

- Mengen
- Topologische Räume
- Hausdorff-Räume
- Metrische Räume
- Banachräume
- Hilberträume
- Euklidische Räume

Def.: • Eine „<u>Topologie</u>" T auf einer Menge X ist eine Menge von Teilmengen von X, so dass

(i) $\emptyset, X \in T$

(ii) $U, V \in T \Rightarrow U \cap V \in T$

(iii) $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $U_\lambda \in T \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in T$

• (X, T) heißt „<u>topologischer Raum</u>" & die Elemente von T heißen „<u>offene Mengen</u>".

• $A \subseteq X$ heißt „abgeschlossen" wenn $X \setminus A$ offen ist.

• Der „Abschluss" $\bar{A}$ von $A \subseteq X$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.

• $A \subseteq X$ heißt „dicht" in X, wenn $\bar{A} = X$.

Bsp.: • Durch eine Metrik induzierte Topologie:

Sei (X, d) Metrischer Raum & $B_r(x) := \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$, $r > 0$

dann ist $T := \{ V \subseteq X \mid \forall x \in V \; \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq V \}$ die übliche („natürliche") Topologie.

• „Diskrete Topologie": $T := \{ V \subseteq X \}$

• „Triviale Topologie": $T := \{ X, \emptyset \}$

Def.: Ein top. Raum (X, T) heißt „<u>Hausdorff-Raum</u>" wenn $\forall x, y \in X$:

$$x \neq y \Rightarrow \exists U, V \in T : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$$

Bem.: Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum, da wir für U & V einfach $B_r(x)$ bzw. $B_r(y)$ mit $r = \frac{1}{2} d(x,y)$ nehmen können.

Def.: (Konvergenz) Ist (X,T) ein topologischer Raum, dann heißt eine Folge $x_n \in X$ „<u>konvergent</u>" gegen x wenn $\forall U \in T$:

$$x \in U \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: x_n \in U$$

Def.: (Stetigkeit) Sind (X,T) und $(\tilde{X}, \tilde{T})$ topologische Räume, dann heißt $f: X \to \tilde{X}$ „<u>stetig</u>" wenn

$$U \in \tilde{T} \Rightarrow f^{-1}(U) \in T$$

Def.: (Kompaktheit) Ist (X,T) ein topologischer Raum, dann heißt $A \subseteq X$ „<u>kompakt</u>" wenn jede offene Überdeckung eine endliche Überdeckung beinhaltet. D.h. für jede Familie $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq T$ mit $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supseteq A$ existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ mit $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} U_{\lambda_i} \supseteq A.$$

Bemerkungen:
- Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind wieder kompakt
- In metrischen Räumen gilt:
  Kompaktheit $\Leftrightarrow$ Folgenkompaktheit (d.h. jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge)