Noether's Theorem

Erinnerung: Aus Newton's Bewegungsgleichungen $\dot{p} = F$ wird mit $L = L(t, x, \dot{x})$, $p := \partial_3 L$, $F := \partial_2 L$ die Euler-Lagrange-Gl. $\frac{d}{dt} \partial_3 L(t, x(t), \dot{x}(t)) = \partial_2 L(t, x(t), \dot{x}(t))$

Diese sind erfüllt g.d.w. x stationärer Punkt des Funktionals

$$S(x) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$$ ist.

Wir hatten bereits: Ist L invariant unter $t \mapsto t+s$ im Sinn von

$$\frac{d}{ds} L\big(t+s, x(t), \dot{x}(t)\big) = 0,$$ dann ist entlang jeder EL-Lösung

$$H(x, \dot{x}) := \dot{x}\, \partial_3 L - L = \text{konstant}.$$

Betrachte nun $x \mapsto X(t, x, s)$ wobei $X \in C^2$ und $X(t, x, 0) = x \;\; \forall t, x$.

Dann folgt aus der Invarianz von L unter $x \mapsto X$:

$$0 \overset{\substack{\text{geforderte Invarianz}\\ \downarrow}}{=} \frac{d}{ds} L(t, X, \dot{X}) = \partial_2 L \frac{dX}{ds} + \partial_3 L \frac{d\dot{X}}{ds}$$

$$\overset{\substack{EL\\ \downarrow}}{=} \left(\frac{d}{dt} \partial_3 L\right) \frac{dX}{ds} + \partial_3 L \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} X$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\partial_3 L \frac{dX}{ds}\right)$$

Ausgewertet bei $s = 0$ folgt daraus:

Satz: Ist $L \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ invariant unter $x \mapsto X(t, x, s)$ d.h. $\frac{d}{ds} L(t, X, \dot{X}) = 0 \;\; \forall x, t$ wobei $X \in C^2$ und $X(t, x, 0) = x \;\; \forall x, t$, dann gilt:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} p_k \xi_k = \text{konst.}}$$ entlang jeder EL-Lösung x. Hier ist $\xi := \frac{d}{ds} X\Big|_{s=0}$ („infinitesimaler Generator").

Bemerkungen:
- Dies ist eine einfach Version des von Emmy Noether 1918 bewiesenen Theorems.
- Grob gesprochen gilt:

Kontinuierlich Symmetrie des Funktionals $x \mapsto \int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\,dt$ $\iff$ Erhaltungsgröße $\frac{d}{dt}\phi(x,\dot{x}) = 0$ für jede EL-Lösung.

Bsp.: (1) „Impulserhaltung"

$X(t,x,s) := x + s e_k \Rightarrow p_k$ ist erstes Integral

$e_k :=$ Einheitsvektor in k'ter Richtung

(2) „Drehimpulserhaltung"

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ X_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 p_1 - x_1 p_2 \text{ ist erstes Integral}$$

Beachte: All diese Transformationen agieren auf einem Vektorraum (d.h. sind von der Form $S: V \to V$), sind invertierbar & so, dass wenn S_1 & S_2 die Bewegungsgleichungen invariant lassen, dann tut dies auch $S_1 \circ S_2$. D.h. wir haben es mit einer Gruppe zu tun.

Exkursion: Gruppentheorie

Def.: ◦ Ein Paar (G,π) aus einer Menge G und einer Abbildung $\pi: G\times G \to G$, $\pi(a,b) =: ab$ heißt „Gruppe", wenn

(i) „Assoziativität" gilt, d.h. $\forall a,b,c \in G: (ab)c = a(bc)$.

(ii) ein „Einselement" $e \in G$ existiert, so dass $\forall g \in G: eg = ge = g$

(iii) für jedes Element $g \in G$ ein „Inverses" $g^{-1} \in G$ existiert, so dass $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

◦ (H,π) heißt Untergruppe von (G,π), wenn $H \subseteq G$ und (H,π) eine Gruppe ist.

◦ Eine Gruppe heißt „endlich" wenn $|G| < \infty$ und „abelsch" (bzw. „kommutativ"), wenn $\forall a,b \in G: ab = ba$.

Bemerkungen:

◦ wie üblich, schreiben wir meist „die Gruppe G" & meinen „die Gruppe (G,π)"

◦ endliche Gruppen sind vollständig „klassifiziert". Der zugehörige Beweis umfaßt insgesamt mehr als 10000 Seiten.

Bsp.

◦ „Zyklische Gruppe"
$(\mathbb{Z}_p, + \bmod p)$, wobei $\mathbb{Z}_p := \{0, \dots, p-1\}$ (endlich & abelsch)

◦ „Permutationsgruppe"
$S_n := \{\text{Permutationen von } n \text{ Elementen}\}$ (endlich & nicht-abelsch)

◦ $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{Z},+)$ (abelsch)

alle nicht-abelsch

◦ „Allgemeine lineare Gruppe"

$$GL(n,\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\}$$
$$= \{ \quad \text{—"—} \quad \mid A \text{ invertierbar}\}$$

π ist hier & im Folgenden immer die Matrixmultiplikation.

- „Unitäre Gruppe" $U(n) := \{ U \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \bar{U}^T U = \mathbb{1} \}$ (→ QT, QFT)
- „Orthogonale Gruppe" $O(n) := \{ O \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid O^T O = \mathbb{1} \}$
- „Lorentzgruppe" $O(3,1) := \{ A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid A \eta A^T = \eta \}$ (→ SRT)

  mit $\eta := \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

- Spezielle Lineare/unitäre/orthogonale/Lorentz Gruppe:

$$SL(n,\mathbb{K}) := \{ A \in GL(n,\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1 \}$$

$$SU(n) := \{ A \in U(n) \mid \det(A) = 1 \}$$

$$SO(n) := \{ A \in O(n) \mid \det(A) = 1 \}$$

$$SO(3,1) := \{ A \in O(3,1) \mid \det(A) = 1 \}$$

- „Eigentliche orthochrone Lorentzgruppe" (→ SRT)

$$SO^+(3,1) := \{ A \in SO(3,1) \mid A_{00} \geq 1 \}$$

- „Symplektische Gruppe" (→ Theo. Mechanik)

$$Sp(2n,\mathbb{R}) := \{ A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \mid A \sigma A^T = \sigma \} \quad \text{mit } \sigma := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

- „Poincaré-Gruppe" (→ SRT)

$$\{ (\Lambda, a) \in O(3,1) \times \mathbb{R}^4 \} \quad \text{mit der Verknüpfung}$$

$$(\Lambda, a) \cdot (\Lambda', a') := (\Lambda\Lambda', a + \Lambda(a'))$$

Es gelten folgende Relationen (wobei "⊆" stets Inklusion in Form einer Untergruppe meint):

$$\begin{array}{ccc} SL(n,\mathbb{C}) & \subseteq & GL(n,\mathbb{C}) \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ SU(n) & \subseteq & U(n) \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ SO(n) & \subseteq & O(n) \end{array}$$

$$Sp(2n,\mathbb{R}) \subseteq SL(2n,\mathbb{R})$$

$$SO^+(3,1) \subseteq SO(3,1) \subseteq O(3,1) \subseteq GL(4,\mathbb{R})$$

kompakt

zusammenhängend

Lie-Gruppen sind Gruppen, die gleichzeitig diff.bare Mannigfaltigkeiten sind.

(z.B.: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, GL, SL, O, SO, U, SU, Sp, SO(3,1), Poincaré)

Zu jeder Liegruppe G gehört eine „Lie-Algebra" $\mathcal{A}_G$ deren Elemente die Rolle von infinitesimalen Generatoren spielen.

Es gilt $\mathcal{A}_G := TG_e$ ist der Tangentialraum am Einselement

z.B. ist dies für $SO(n)$ die Menge $\mathcal{A}_G := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = -A \wedge \mathrm{tr}[A] = 0 \}$

- i.A. gilt $a \in \mathcal{A}_G \Rightarrow \exp[a] \in G$
- Für kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppen gilt auch die Umkehrung:

$$\forall g \in G \ \exists a \in \mathcal{A}_G : g = \exp[a]$$

i.A. ist $\exp : \mathcal{A}_G \to G$ jedoch nicht surjektiv (z.B. für $Sp(2n, \mathbb{R})$)