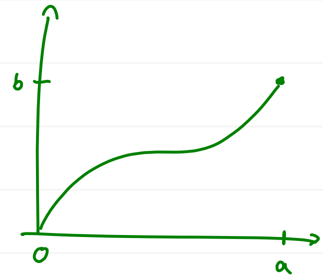
Bsp. ③ „Fermatsches Prinzip":

„Bei geg. Start-/Zielpunkt folgt ein Lichtstrahl einem Weg mit stationärer Laufzeit"

Laufzeitfunktional (ähnlich Bsp. ②):




$$F(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{v(x,y)}\,dx$$

$n(x,y) := \frac{1}{v(x,y)}$ heißt „Brechungsindex"

Annahme: $n(x,y) = n(y)$ (z.B. Abnahme mit der Höhe wegen dünnerer Atmosphäre)

Dann ist $L(y,y') = n(y)\sqrt{1+y'(x)^2}$ und die E.-L. Gleichung lautet $\frac{\partial}{\partial y} L = \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} L$, d.h.

$$n'(y)\sqrt{1+y'^2} \overset{EL}{=} \frac{d}{dx}\left(n(y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)$$

$$= \frac{n'y'^2 + ny''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{ny'^2y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\Leftrightarrow\quad n'(1+y'^2)^2 = (n'y'^2 + ny'')(1+y'^2) - ny'^2y''$$

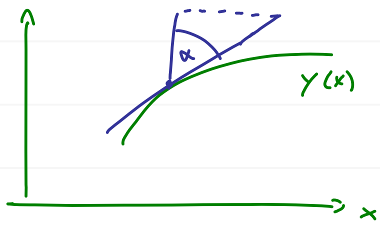
$$\Leftrightarrow\quad \boxed{n'(1+y'^2) = ny''}$$

1. Konsequenz: ist $n' < 0$, so ist wegen $n > 0$ auch $y'' < 0$, d.h. der Lichtstrahl $y(x)$ verläuft konkav

(Man sieht die Sonne noch, wenn sie schon untergegangen ist)

2\. Konsequenz: „Gesetz von Snellius" $\boxed{n(y)\sin\alpha = \text{konst.}}$

Beweis: $L(y,y') = n(y)\sqrt{1+y'^2}$ hängt nicht explizit von $x$ ab. D.h.




$$\text{konst.} \overset{!}{=} L - y'\frac{\partial L}{\partial y'}$$

$$= n\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2 n}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{n}{\sqrt{1+y'^2}}$$

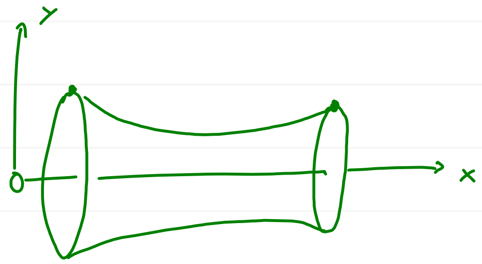
ist erstes Integral (d.h. konstant entlang jeder Lösung der EL-Gl.)

Außerdem gilt $y'^2 = \frac{\cos(\alpha)^2}{\sin(\alpha)^2} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} - 1$

und damit $\sin\alpha = (1+y'^2)^{-1/2}$

□

Bsp. 4 Rotationsminimalfläche




Bestimme die Funktion $y \in C^2([x_1, x_2], \mathbb{R}_+)$ mit festgelegten Endpunkten $y(x_1) = y_1$ & $y(x_2) = y_2$, deren Rotation um die x-Achse den Rotationskörper mit minimaler (seitlicher) Oberfläche bildet.

Zu minimieren ist also das Funktional $F(y) = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}}_{=: L(y(x), y'(x))}\, dx.$

Die Fläche ist dann $2\pi F(y)$.

$$H(y,y') := y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{y'^2 y}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = \frac{-y}{\sqrt{1+y'^2}} \overset{!}{=} c$$

ist erstes Integral.

Für $c=0$, wird dies nur für $y=0$ gelöst.

Für $c \neq 0$ führt dies auf $\quad y' = \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}$

Dies wird ($\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe) durch $\quad y(x) = c \cosh\left(\frac{x-\tilde{c}}{c}\right)$ gelöst.

Die Kurve heißt „Kettenlinie".

Bemerkungen zu den Randbedingungen:

- Randbedingungen für $x : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ von der Form $x(a) = c_a$ heißen „Dirichlet-Randbedingungen" ( $\dot{x}(a) = c_a$ wäre „Neumann-Randb." )

- Betrachte $\frac{d}{d\varepsilon} F(x+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} \overset{!}{=} 0$ für alle $h$, so dass

$$x + \varepsilon h \in \{ f \in C^2([a,b], \mathbb{R}) \mid f(a) = c_a \}$$

d.h. „freie" Randbed. bei $b$ & Dirichlet-R.b. bei $a$

Ist $F(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$, dann führt dies auf

$$0 \overset{!}{=} \int_a^b \left( \partial_2 L(t,x,\dot{x})\, h + \partial_3 L(t,x,\dot{x})\, \dot{h} \right) dt$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} \int_a^b \left( \partial_2 L - \frac{d}{dt} \partial_3 L \right) h \, dt + \left[ h\, \partial_3 L \right]_a^b \qquad (*)$$

Eine stationäre Lösung $x(t)$ erfüllt dann:

(i) $\quad \left( \partial_2 L - \frac{d}{dt} \partial_3 L \right) = 0 \quad$ wenn wir $(*)$ anwenden für alle $h \in C^2$ mit $h(a) = h(b) = 0$

(ii) $\quad \partial_3 L(t,x,\dot{x})\Big|_{t=b} = 0 \quad$ wenn wir in $(*)$ (i) & $h(a) = 0$, $h(b) \neq 0$ verwenden.

Falls beide Randbedingungen frei sind, muß (ii) für $t=b$ & $t=a$ gelten.