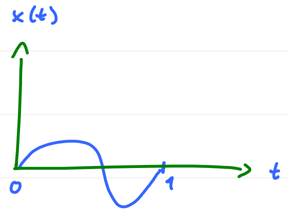
VI. Variationsrechnung & Euler-Lagrange Gleichungen

Def.: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt eine Abbildung $F: V \to \mathbb{K}$ ein „Funktional".

Im Folgenden betrachten wir nur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.



Bsp.: $V = \{ x \in C^1([0,1]) \mid x(0) = x(1) = 0 \}$

$$F(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}\, dt \qquad \left(= \text{Länge der Kurve } \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}\right)$$

D.h. F ist „Funktion auf Funktionen".

Weiter unten werden wir versch. Bsp.e aus der Physik (z.B. die „Wirkung") diskutieren.

Grundproblem der „Variationsrechnung":

Minimierung von Funktionalen ggfs. unter Nebenbedingungen.

Damit F bei $x \in V$ ein M. in $U \subseteq V$ annehmen kann, muß (falls $F \in C^1$)

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(x + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon = 0} = F'(x)\, h = 0 \quad \forall h \in V \text{ für die } x + \varepsilon h \in U,$$

für hinreichend kleines $\varepsilon \neq 0$. D.h. x muß stationärer Punkt sein.

Eine wichtige Klasse von Funktionalen ist von der Form

$$\boxed{F(x) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt}\ , \text{ wobei}$$

wobei $L \in C^2([0,1] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ „Lagrange-Funktion" heißt

und $x: [0,1] \to \mathbb{R}^m$ aus einem geeigneten C^1-Funktionenraum V ist.

Für's erste: $m = 1$ & $V = \{ x \in C^2([0,1], \mathbb{R}) \mid x(0) = x(1) = 0 \}$

Stationarität bei $x \in V$ bedeutet dann $\forall h \in V$:

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} F(x+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon} L\big(t, x(t)+\varepsilon h(t), \dot{x}(t)+\varepsilon \dot{h}(t)\big)\Big|_{\varepsilon=0} dt$$

$$\underset{L \in C^1}{=} \int_0^1 \big(\partial_2 L(t,x,\dot{x})\, h + \partial_3 L(t,x,\dot{x})\, \dot{h}\big)\, dt$$

$$= \int_0^1 \Big(\partial_2 L(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt}\partial_3 L(t,x,\dot{x})\Big)\, h\, dt \qquad (1)$$

part. Int. mit $h(0)=h(1)=0$ & $L, x \in C^2$

Lemma: [du Bois-Reymond] Ist $x \in C([0,1], \mathbb{R})$ und gilt für alle $h \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ mit $h(0)=h(1)=0$ dass $\int_0^1 x(t) h(t)\, dt = 0$, dann ist $x = 0$.

Beweis: Angenommen $x(\tilde{t}) > 0$ für ein $\tilde{t} \in (0,1)$. Wegen Stetigkeit gibt es $[a,b] \subseteq [0,1]$, so dass $x(t) \geq \frac{1}{2} x(\tilde{t})$ $\forall t \in [a,b]$.

Für $h(t) := \begin{cases} (t-a)^4 (t-b)^4, & t \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ gilt dann

$$\int_0^1 x(t) h(t)\, dt \geq \frac{1}{2} x(\tilde{t}) \int_a^b h(t)\, dt > 0 \quad \lightning \qquad \square$$

Bemerkung: tatsächlich genügt $h \in C^\infty$.

Satz: $F: V \to \mathbb{R}$ ist in $x \in V$ genau dann stationär, wenn x auf $[0,1]$ die „Euler-Lagrange Gleichung"

$$\boxed{\partial_2 L(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt} \partial_3 L(t, x(t), \dot{x}(t))}$$

erfüllt.

Beweis: Lemma angewendet auf (1). $\square$

Bemerkungen:

- Man liest/schreibt oft kurz „$\frac{\partial}{\partial x} L = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L$"

- $\frac{d}{dt}\Big(\partial_3 L(t,x,\dot{x})\Big) = \Big(\partial_1\partial_3 L,\ \partial_2\partial_3 L,\ \partial_3\partial_3 L\Big)\cdot \frac{d}{dt}(t,x,\dot{x})$

$$= \partial_1\partial_3 L + (\partial_2\partial_3 L)\dot{x} + (\partial_3^2 L)\ddot{x}$$

$$\text{"} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L + \Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\Big)\dot{x} + \Big(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\Big)\ddot{x} \text{"}$$

- Der Satz gilt auch für die Minimierung über $x \in C^2([a,b])$ mit $x(a) = c_1$ und $x(b) = c_2$, da $x + \varepsilon h$ für $\varepsilon \neq 0$ diese Randbedingungen erfüllt g.d.w. $h(a) = h(b) = 0$.

- Bezug zur Physik: in „konservativen Systemen" mit $L = T - U$, gilt das „Hamilton-Prinzip" (= Prinzip extremaler Wirkung), das fordert, dass die „Wirkung"

$$S(x) := \int_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$$

extremal sein muß.

- $x(t) \in \mathbb{R}^m$ führt auf die Euler-Lagrange-Gl.en:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

Satz: Hängt $L = L(x,\dot{x})$ nicht explizit von t ab, dann ist

$$\boxed{H := \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L - L} = \dot{x}(t)\,\partial_2 L(x(t),\dot{x}(t)) - L(x(t),\dot{x}(t))$$

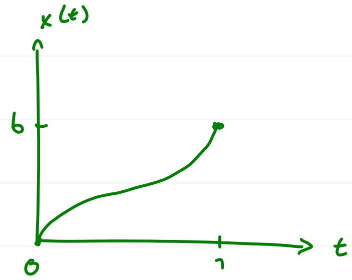
ein erstes Integral der E.-L. Gl., d.h. $H =$ konst. längs jeder Lösung.

Beweis: $$\frac{d}{dt}\Big(L - \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\Big) \overset{L = L(x,\dot{x})}{=} \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} L + \ddot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L - \ddot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L - \underbrace{\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L}_{= \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} L \text{ wegen E.L.}} = 0 \qquad \square$$

Bemerkungen:
- H heißt in der Physik „Hamiltonfunktion",
  $H =$ konst. „Energieerhaltung"
- Dies ist ein Spezialfall von „Noether's Theorem"
- mögliche Lösungsstrategie:
  Auflösen von $H(x, \dot{x}) = c$ nach $\dot{x}$
  & Trennung der Variablen

Bsp. ①: (kürzester Weg zw. $(0,0)$ & $(1,b)$)

$$F(x) := \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}\, dt$$



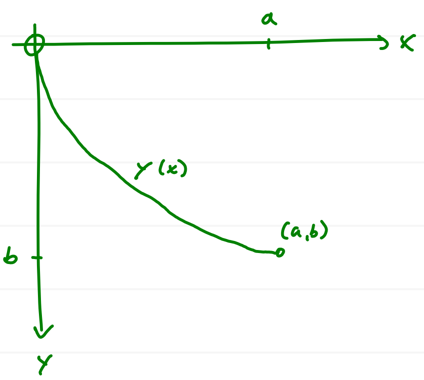
d.h. $L = L(\dot{x}) = \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}$

E.-L. $\Rightarrow$ $$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L = \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}}$$

$$= \frac{\ddot{x}}{(1 + \dot{x}(t)^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) \text{ ist linear} \quad \square$$

Bsp. ②: „Brachistochrone"

- aufgeworfen von Galileo, der beobachtete, dass es sich auf einem $\frac{1}{4}$-Kreis schneller rutschen lässt, als auf einer schiefen Ebene.
- gelöst von Johann Bernoulli
- gilt als Ursprung der Variationsrechnung



- Start bei 0 mit $v = 0$
- Energieerhaltung $\frac{1}{2} v^2 = g y$
  $\Rightarrow v = \sqrt{2 g y}$
- Zeit von 0 bis (a,b):

$$F(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2 g y(x)}}\, dx$$

Bogenlänge

Geschw.

D.h. $F(y) = \int_0^a L(x,y,y')\,dx$ mit $L(x,y,y') = L(y,y') := \left(\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{1/2}$

$F(y)$ ist stationär, wenn y die E.-L. Gleichung $\frac{\partial}{\partial y} L = \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} L$ erfüllt.

Da L nicht explizit von x abhängt, gilt entlang jeder Lösung $y(x)$:

$$c \overset{!}{=} y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} - \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

$$= -\left[(1+y'^2)(2gy)\right]^{-1/2}$$

D.h. $2gc^2 y (1+y'^2) = 1$ (1)

& damit auch $0 \le 2gc^2 y \le 1$

Wir parametrisieren die Kurve durch $x(t), y(t)$, wobei $y(t) := y(x(t))$, so dass wegen $\frac{d}{dt} y(t) = y'(x(t))\,\dot{x}(t)$ gilt $\dot{x} = \frac{\dot{y}}{y'}$

Setze $y(t) = k(1-\cos t)$. (2) Wobei $k := \frac{1}{4gc^2}$. (3)

Dann ist $\dot{x}(t) = \frac{\dot{y}}{y'} \overset{(1),(2)}{=} \frac{k\sin t}{\sqrt{\frac{1}{2gc^2 y} - 1}} \overset{(3)}{=} \frac{k \sin t}{\sqrt{\frac{2k}{y} - 1}} \overset{(2)}{=} \frac{k\sin t}{\sqrt{\frac{2}{1-\cos t} - 1}}$

$$= \frac{k \sin t \sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}} = k(1-\cos t)$$

$\sin t = \sqrt{(1-\cos t)(1+\cos t)}$

Damit ist die „Zykloide" (= Abrollkurve)

$x(t) = k(t - \sin t)$

$y(t) = k(1-\cos t)$, $t \in [0,T]$

die Lösung des Brachistochronenproblems, falls k & T so gewählt werden, dass $k(T - \sin T) = a$

$k(1-\cos T) = b$.

Bemerkungen:

- Die Zykloide steht auf dem Kopf, da y nach unten positiv gewählt wurde.

- $y'(0) = \infty$

- Die Kurve hängt nicht von g ab.

- Die Zykloide ist auch „Tautochrone", d.h. von jedem Punkt aus wird die gleiche Zeit bis zum Tiefpunkt benötigt.