Satz: (Abschluß = Menge aller Grenzwerte) Ist (M,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$.

Dann gilt: $x \in \bar{A} \iff$ es gibt eine gegen x konvergente Folge $x_n \in A$.

Beweis: "$\Rightarrow$": $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists\, x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$ für alle $n \in \mathbb{N}$

und damit $x_n \to x$

"$\Leftarrow$": jede Umgebung von x muß, da $x_n \to x$, fast alle $x_n \in A$ enthalten.

Somit ist $x \in A \cup \partial A$.

Bem.: In diesem Sinn ist der Abschluss „abgeschlossen": er enthält alle Grenzwerte (sogar alle Häufungspunkte).

Lemma: (Konvergenz = Komponentenweise Konvergenz)

In $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$ gilt für jede Folge $x_n \in \mathbb{C}^d$ mit Komponenten $x_{n,j} \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, d$:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in \mathbb{C}^d$

$$\iff \forall j \in \{1,\dots,d\}: \lim_{n\to\infty} x_{n,j} = x_j$$

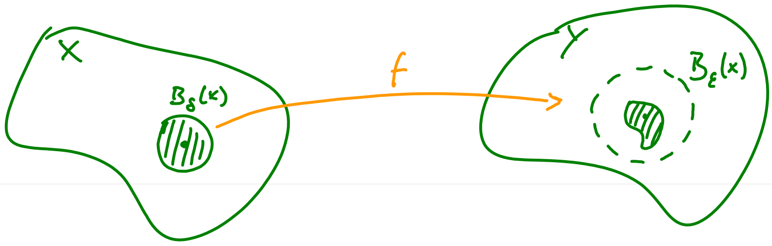
Beweis: "$\Rightarrow$" wir wissen: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n \geq N: \|x_n - x\|_\infty < \varepsilon$

die Aussage folgt dann aus $|x_{n,j} - x_j| \leq \|x_n - x\|_\infty$

"$\Leftarrow$" wir wissen: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N_j \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_j: |x_{n,j} - x_j| < \varepsilon$

Insbesondere gilt dies für alle $n \geq N := \max_j \{N_j\}$, so dass die Aussage aus $\|x_n - x\|_\infty = \max_j |x_{n,j} - x_j|$ folgt. $\square$

I.3. Stetigkeit



Def.: Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zw. metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y).

- f heißt „stetig bei $x \in X$", wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \underbrace{f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))}$$

äquivalent zu $\forall x': d_X(x,x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

- f heißt „stetig", wenn f stetig bei allen $x \in X$ ist.
- Die Menge aller stetigen Abbildungen $f: X \to Y$ bez. wir mit $C(X,Y)$
- f heißt „gleichmäßig stetig", wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$
- f heißt „Lipschitz stetig", wenn $\exists L \in \mathbb{R}\ \forall x, x' \in X: d_Y(f(x), f(x')) \leq L\, d_X(x,x')$

Bem.:
- Summen, Produkte und Verknüpfungen stetiger Fkt.en sind wieder stetig
- es gilt: Lipschitz stetig $\Rightarrow$ gl. stetig $\Rightarrow$ stetig

Satz: (Stetigkeit von Linearen Abbildungen)
Sei $F: X \to Y$ eine lineare Abb. zw. zwei normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (und ggfs. verschiedenen Normen).
(Erinnerung: Linearität bedeutet hier, dass $F(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i F(x_i)\ \forall \alpha_i \in \mathbb{K}, \forall x_i \in X$)
Dann gilt: F Lipschitz stetig $\Leftrightarrow$ F stetig

Beweis: "$\Rightarrow$": trivial.

"$\Leftarrow$": Wir gebrauchen mehrmals, dass $F(x_1) - F(x_2) = F(x_1 - x_2) =: F(x)$.
Wegen Stetigkeit bei 0 gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass
$\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|F(x)\| \leq 1$. Demnach gilt $\forall x \in X \setminus \{0\}$:

$$\|F(x)\| = \frac{\|x\|}{\delta} \left\| F\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\| \qquad \square$$

Bem.: Bei linearen Abb.en $F: X \to Y$ schreibt man oft Fx statt $F(x)$.

Def.: ∘ Ist $F: X \to Y$ eine lineare Abb. zw. normierten Vektorräumen. Dann ist die „Operatornorm" von F definiert als

$$\|F\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Fx\|}{\|x\|}$$

∘ F heißt „beschränkt", wenn $\|F\| < \infty$

Bem.: ∘ Wegen $\|F(x) - F(y)\| = \|F(x-y)\| \leq \|F\| \, \|x-y\|$ ist Beschränktheit äquivalent zu Lipschitz-Stetigkeit.

∘ Auf endl.-dim. Vektorräumen sind alle lin. Abb. beschränkt. In ∞-dim Räumen gilt dies nicht mehr.

Satz: (Äquivalente Charakterisierungen von Stetigkeit)
Für eine Abb. $f: X \to Y$ zw. metrischen Räum sind äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) für alle $x \in X$ und alle Folgen $x_n \to x$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$

(iii) $U \subseteq Y$ offen $\Rightarrow$ $f^{-1}(U)$ offen in X.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): betrachte eine konvergente Folge $x_n \to x$. Wegen (i) gibt es zu bel. $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $d_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ für alle x_n mit $d_X(x_n, x) < \delta$. Letzteres gilt aber wegen $x_n \to x$ für alle $n > N$ wenn N hinreichend groß ist. Also gilt auch $d_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ $\forall n > N$ & damit $f(x_n) \to f(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): angenommen (i) gilt nicht, d.h. $\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x_n \in X$: $d_X(x, x_n) < \delta \wedge d_Y(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Für $\delta = \frac{1}{n}$ erhalten wir eine Folge $x_n \to x$ mit $f(x_n) \not\to f(x)$ im Widerspruch zu (ii).

(i) $\Rightarrow$ (iii): Sei f stetig, $U \subseteq Y$ offen und $x \in f^{-1}(U)$ d.h. $f(x) \in U$.
Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$ (dies verwendet U offen)
& $\delta > 0$, so dass $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ (dies verwendet f stetig)
Dann gilt $f(B_\delta(x)) \subseteq U$ also $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$.
Wegen (iii) ist $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ offen. Zudem gilt $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$.
Damit $\exists \delta > 0$: $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ und damit

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

$\square$

Korollar: $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist stetig (bzgl. der Supremumsnormen), genau dann wenn alle Komponentenfunktionen $f_j : x \mapsto (f(x))_j$, $j = 1, \dots, n$ stetig sind.

Beweis: folgt aus der Äquivalenz von Stetigkeit (i) $\Leftrightarrow$ (ii) auf S. 6 zusammen mit dem Lemma (S. 5). $\square$

Bem.: Stetigkeit von $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ folgt i.a. nicht aus Stetigkeit in jeder Variablen.
z.B. ist $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x_1 x_2 / \|x\|^2 & , \|x\| \neq 0 \\ 0 & , \|x\| = 0 \end{cases}$ unstetig bei 0, da $f(0) = 0$, $f((a,a)) = \frac{1}{2} \;\; \forall a \neq 0$, aber $x_1 \mapsto f((x_1, x_2))$ & $x_2 \mapsto f((x_1, x_2))$ sind stetig.