IV. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

IV.1. Motivation & Definition

In der Physik reduzieren z.B. holonome Zwangsbedingungen & Erhaltungssätze die Zahl der „unabhängigen Freiheitsgrade".

Bsp.: Pendel

$x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\| = r$ konstant

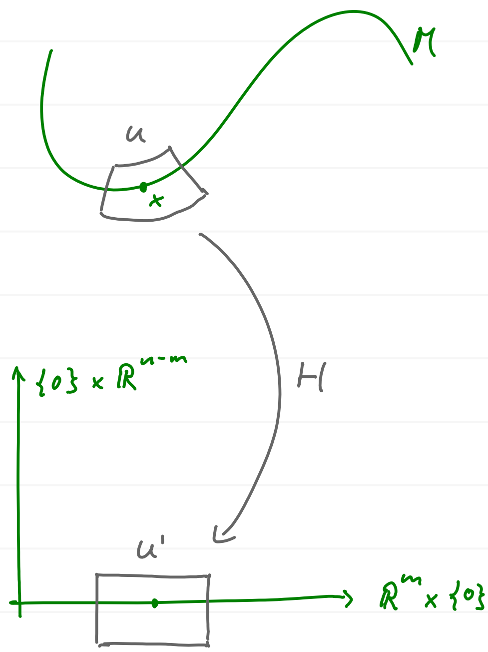
$\to$ zwei Freiheitsgrade

Gibt es für eine Beschreibung im $\mathbb{R}^n$ m „unabhängige Freiheitsgrade", hat man es typischerweise mit einer m-dimensionalen „Untermannigfaltigkeit" $M \subseteq \mathbb{R}^n$ zu tun.

Def.:
- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit" von $\mathbb{R}^n$, wenn es um jedes $x \in M$ eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung U und einen C^k-Diffeomorphismus $H: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$H(M \cap U) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U'$$

- H heißt dann „äußere Karte" (bzw. „Flachmacher") für M um x.
- Mit $V := M \cap U$ und V' so dass $(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U' = V' \times \{0\}$ definieren wir die „innere Karte" (oder einfach „Karte") $h: V \to V'$ durch $h(x) \times \{0\} := H|_{M \cap U}(x)$.
- $n-m$ heißt „Kodimension" von M.



Bsp.:
- Jeder m-dimensionale affine Teilraum $A := a + R \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ & $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein m-dimensionaler Untervektorraum ist eine m-dim. C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

- n-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind genau die offenen Teilmengen im $\mathbb{R}^n$.
- 0-dim. Untermannigfaltigkeiten bestehen aus isolierten Punkten.
- Sind $M_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ m_i-dim. Untermannigfaltigkeiten, so ist $M_1 \times M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ eine (m_1+m_2)-dim. Untermannigfaltigkeit.

IV.2. Satz vom regulären Wert

Def.: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $f: U \to \mathbb{R}^m$ diff.bar bei $x \in U$.

- x heißt „regulärer Punkt" wenn $f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist und „kritischer Punkt" (synonym: „singulärer Punkt") wenn $f'(x)$ nicht surjektiv ist.
- $y \in \mathbb{R}^m$ heißt „regulärer Wert" falls $f^{-1}(\{y\})$ nur reguläre Punkte enthält oder leer ist. Andernfalls heißt y „kritischer Wert".

Bem.:
- Für $m \leq n$ sind reguläre Punkte der Normalfall, für $m > n$ dagegen kann es keine geben.
- $f^{-1}(\{y\})$ sind alle $x \in \mathbb{R}^n$, die die „holonomen Zwangsbedingungen"

$$\begin{matrix} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = y_m \end{matrix} \qquad \text{erfüllen.}$$

Satz: (Satz vom regulären Wert)
Sei y ein regulärer Wert von $f \in C^l(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, $l \geq 1$. Dann ist $M := f^{-1}(\{y\})$ eine C^l-Untermannigfaltigkeit mit Kodimension k.

Beweis: Sei $x_0 \in f^{-1}(\{y\})$, $g: U \to \mathbb{R}^k$, $g(x) := f(x) - y$. Dann ist $M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ und Rang $g'(x_0)$ = Rang $f'(x_0) = k$. D.h. nach geeigneter Umordnung der Koordinaten x_j gilt $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1\dots k} \neq 0$.

Damit hat die Abbildung $H: U \to \mathbb{R}^n$, $H(x) := (g_1(x), \dots, g_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n)$ eine Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1\dots n} = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{c:c} \multicolumn{2}{c}{\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)} \\ \hdashline 0 & \mathbb{1} \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{00}}_{k}\ \underbrace{\hphantom{00}}_{n-k} \end{array} \begin{array}{l} \} \; k \text{ Zeilen} \\ \} \; n-k \end{array}$$

mit vollem Rang.

D.h. $H'(x_0)$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus & nach dem Umkehrsatz ist H demnach ein lokaler C^l-Diffeomorphismus. Außerdem gilt

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\} = H^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k})$$

$\square$

Bsp. ①: Sei $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Ax \rangle = b\}$ eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Kodimension 1.

Beweis: Definiere $f(x) := \langle x, Ax \rangle - b$. Dann ist $M = f^{-1}(\{0\})$ und $f'(x)h = 2\langle x, Ah \rangle$.
$f'(x)$ ist surjektiv, wenn $x^T A \neq 0$ was durch $x^T A x = b \neq 0$ gewährleistet ist. $\square$

D.h. insbesondere, dass die Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ eine n-dim. UMF des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Bsp. ②: (Freiheitsgrade eines Stabes) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|x-y\| = r\}$ ist für $r > 0$ eine 5-dim. C^∞-UMF von $\mathbb{R}^6$.

Beweis: Mit $A = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle$

$$= \|x - y\|^2$$

Für $b = r^2$ ist dies also wieder ein Spezialfall von Bsp. ①. $\square$

Bsp. 3: Die „orthogonale Gruppe" $O(n) := \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = \mathbb{1} \}$ ist eine C^∞-UMF von $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Dimension $\frac{1}{2} n(n-1)$.

Beweis: Sei: $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_s^{n\times n} := \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^T \} \simeq \mathbb{R}^k$ mit $k = \underbrace{\frac{n^2-n}{2}}_{\text{Offdiagonale}} + \underbrace{n}_{\text{Diagonale}} = \frac{1}{2}(n+1)n$

$$f(A) := A^T A$$

Wir zeigen: $\mathbb{1}$ ist regulärer Wert von f, d.h. $f'(X)$ ist surjektiv für alle X mit $f(X) = \mathbb{1}$:

$$f'(X)\Delta = \Delta^T X + X^T \Delta \overset{!}{=} Y \in \mathbb{R}_s^{n\times n}$$

wird erreicht für $\Delta = \frac{1}{2} X Y$, wenn $f(X) = \mathbb{1}$.

Also ist $f^{-1}(\{\mathbb{1}\}) = O(n)$ UMF von $\mathbb{R}^{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ der Dimension $n^2 - k = \frac{1}{2} n(n-1)$.

Bsp. 4: Die „Lorentzgruppe" $O(3,1) := \{ X \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid X \mu X^T = \mu \}$ mit $\mu = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ist eine 6-dim C^∞-UMF von $\mathbb{R}^{4\times 4}$.

Beweis: $\to$ Übung.

Bemerkung: Die 6 Freiheitsgrade entsprechen 3 für Rotation im Raum & 3 für einen „boost".