III.3. Satz über implizite Funktionen

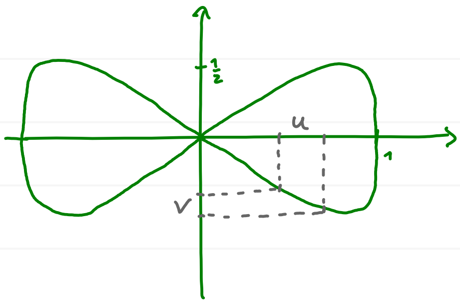
Ziel: Auflösen von (nicht-linearen) Gleichungssystemen

Gegeben: $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \quad f(x,y) = 0$

Gesucht: $\hat{y}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass $\forall (x,y) \in U \times V$:

$$f(x,y) = 0 \iff y = \hat{y}(x)$$

Bsp. 1: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2$



Nullstellenmenge $N := \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$

Für fast jeden Punkt $(x_0, y_0) \in N$ gibt es $U \times V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, so dass sowohl $\hat{y}$ als auch $\hat{x}$ existieren. Ausnahmen:

$(0,0)$: weder $\hat{y}$ noch $\hat{x}$ existiert.

beachte: $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 0$

$(\pm 1, 0)$: $\hat{y}$ existiert nicht, aber $\hat{x}$ existiert

beachte: $\frac{\partial}{\partial y} f(\pm 1, 0) = 0$ aber $\frac{\partial}{\partial x} f(\pm 1, 0) \neq 0$.

Bsp. 2: $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$(x,y) \mapsto Ax + By$ lin. Gl.-sys. mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$Ax + By = 0 \iff y = \underbrace{-B^{-1}Ax}_{=: \hat{y}(x)}$$ falls B^{-1} existiert, d.h. falls $\det(B) \neq 0$

beachte: $B = \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_l}\right)_{k,l=1,\dots,m}$

<u>Def.</u>: („partielle Differentiale") Seien X, Y, Z Banachräume, $U \subseteq X \times Y$ offen und $f \in C^1(U, Z)$. Wir definieren

$$d_X f(x,y) : X \to Z, \ h \mapsto f'(x,y)(h,0)$$

$$d_Y f(x,y) : Y \to Z, \ k \mapsto f'(x,y)(0,k)$$

<u>Bemerkungen</u>: ∘ damit ist das „totale Differential" (d.h. die Ableitung)

$$df(x,y)(h,k) := \underbrace{f'(x,y)}_{J}(h,k) = \underbrace{d_X f(x,y)}_{J_X} h + \underbrace{d_Y f(x,y)}_{J_Y} k$$

∘ Für die zugehörigen Jacobi-Matrizen gilt dann

$$J = \left(J_X \,\vdots\, J_Y \right)$$

<u>Satz</u> (über implizite Funktionen): Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, X, Y, Z Banachräume, $U \subseteq X \times Y$ offen und $(x_0, y_0) \in U$ eine Nullstelle von $f \in C^k(U, Z)$. Wenn $d_Y f(x_0, y_0) : Y \to Z$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist, dann gibt es Umgebungen $V \subseteq X$ von x_0 & $W \subseteq Y$ von y_0, sowie eine Abbildung $\hat{y} \in C^k(V, W)$, so dass
$$f(x,y) = 0 \ \wedge \ (x,y) \in V \times W$$
$$\Leftrightarrow \ y = \hat{y}(x) \ \wedge \ x \in V$$

<u>Beweis</u>: Definiere $F(x,y) := (x, f(x,y))$, $F : U \to X \times Z$

$$F'(x_0, y_0)(h,k) = (h, d_X f(x_0, y_0) h + d_Y f(x_0, y_0) k)$$

d.h. $$J_F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ J_X(x_0, y_0) & J_Y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Da $d_Y f(x_0, y_0)$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist, ist auch $F'(x_0, y_0)$ einer. Nach dem Umkehrsatz ist F dann ein lokaler C^k-Diffeomorphismus.

D.h. es gibt eine Umgebung U_0 von (x_0, y_0), so dass $F^{-1}: F(U_0) \to U_0$ mit $F^{-1}(a,b) =: (a, \tilde{y}(a,b))$ für geeignetes $\tilde{y}$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Für $(x,y) \in U_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad F(x,y) = (x,0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) = F^{-1}(x,0) = (x, \tilde{y}(x,0)) \\ &\Leftrightarrow \quad y = \tilde{y}(x,0) \end{aligned}$$

Wegen Stetigkeit von $\tilde{y}$ finden sich passende Umgebungen $V \times W \subseteq U_0$, so dass $\hat{y}: V \to W$, $\hat{y}(x) := \tilde{y}(x,0)$ das Gewünschte leistet. $\square$

__Bemerkung:__
- $d_y f(x_0,y_0)$ Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $\det\left(J_y(x_0,y_0)\right) \neq 0$
- Ist $d_y f(x_0,y_0)$ kein Isomorphismus, dann kann es mehrere „Lösungszweige" $\hat{y}_i(x)$ geben („Bifurkation")

__Bsp.:__

$$f_1(x,y_1,y_2) = x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 = 0$$
$$f_2(x,y_1,y_2) = xy_1 + y_1 y_2 + y_2 x + 2 = 0$$

Ist alles um die Nullstelle $(2,-1,0)$ nach (y_1,y_2) auflösbar?

$$d_y f(2,-1,0) = \left.\begin{pmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x+y_2 & x+y_1 \end{pmatrix}\right|_{(2,-1,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(\dots) = 3 \quad \Rightarrow$ Ja ✓

__Korollar:__ Sei $U \subseteq X \times Y$ offen und $f \in C^1(U,Z)$, so dass $f(x,y) = 0$ für $(x,y) \in V \times W$ nach y durch $\hat{y}: V \to W$ auflösbar ist. Dann gilt:

$$\hat{y}'(x) = -\left(d_y f(x,\hat{y}(x))\right)^{-1} d_x f(x, \hat{y}(x))$$

Beweis: Wir differenzieren $x \mapsto f(x, \hat{y}(x)) = 0$. Dazu wenden wir die Kettenregel auf $f(x, \hat{y}(x)) = f \circ h(x)$ an, wobei $h : x \mapsto (x, \hat{y}(x))$.
Dann gilt
$$0 = f'(x, \hat{y}(x))\, h'(x) = \begin{pmatrix} d_x f(h(x)) & d_y f(h(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{y}'(x) \end{pmatrix}$$
$$= d_x f(x, \hat{y}(x)) + d_y f(x, \hat{y}(x))\, \hat{y}'(x).$$
$\square$