Wiederholung: ∘ Für ein Vektorfeld $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gilt:

(i) F ist ein Gradientenfeld, d.h. $\exists\, \phi \in C^1(U, \mathbb{R})$: $F = \nabla \cdot \phi$

$\Leftrightarrow$ F ist konservativ, d.h. $\oint F(r) \cdot dr = 0$

$\Leftrightarrow$ $\int_\gamma F(r) \cdot dr$ ist wegunabh.

$\overset{n=3}{\Rightarrow}$ $\nabla \times F = 0$ (1)

(ii) für $n=3$: $F = \nabla \times \tilde{F} \Rightarrow \nabla \cdot F = 0$ (2)

d.h. Rotationsfelder sind Divergenzfrei

Bemerkung: Das Potential ϕ, bzw. das „Vektorpotential" $\tilde{F}$ sind (wenn F Gradienten- bzw. Rotationsfeld ist) durch F nicht eindeutig bestimmt, da

$$\nabla \cdot \phi = \nabla \cdot (\phi + \text{Konstante}), \text{ bzw.}$$

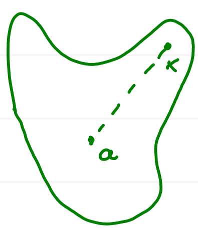
$$\nabla \times \tilde{F} = \nabla \times (\tilde{F} + \nabla f) \quad \forall f \in C^2(U, \mathbb{R}).$$

Die entstehende Freiheit in der Wahl von $\tilde{F}$ nennt man „Eichfreiheit". In der E-dynamik wird z.B. oft die „Coulombeichung" verwendet, die erzwingt, dass $B = \text{rot}\, A$, so dass $\text{div}\, A = 0$.

Die Umkehrungen der Implikationen (1) & (2) gelten, wenn U eine zusätzliche Eigenschaft erfüllt, z.B.:

Def.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „sternförmig", wenn es ein $a \in U$ gibt, so dass

$$\forall x \in U\ \forall t \in [0,1]: \quad ta + (1-t)x \in U.$$



Beachte: jede konvexe Menge ist sternförmig.

Satz (Poincaré-Lemma): Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen & sternförmig und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Dann gilt: $\partial_i F_k = \partial_k F_i \quad \forall i, k = 1, \dots, n$

$\iff F$ ist ein Gradientenfeld

Beweis: "$\Leftarrow$": Ist $F = \nabla \phi$, dann gilt: $\partial_i F_k = \partial_i \partial_k \phi = \partial_k \partial_i \phi = \partial_k F_i$

"$\Rightarrow$": O.B.d.A. sei U sternförmig bzgl. des Ursprungs (d.h. $a = 0$).

Definiere $\phi(x) := \int_0^1 F(tx) \cdot x \, dt$. Dann gilt:

$$\partial_k \phi(x) \overset{F \in C^1}{=} \int_0^1 \partial_k \left(\sum_{i=1}^n F_i(tx)\, x_i \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(F_k(tx) + \sum_{i=1}^n t x_i \underbrace{\partial_k F_i(tx)}_{= \partial_i F_k} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(F_k(tx) + t \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i \, \partial_i F_k(tx)}_{= \nabla F_k(tx) \cdot x} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(F_k(tx) + t \overbrace{\frac{d}{dt} F_k(tx)} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t F_k(tx) \right) dt = F_k(x)$$

D.h. $F = \operatorname{grad} \phi$. $\square$

Satz: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen & sternförmig und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, so dass $\nabla \cdot F = 0$.

Dann ist $\tilde{F}(r) := \int_0^1 t F(tr) \, dt \times r$ ein Vektorpotential, d.h. $F = \nabla \times \tilde{F}$.

Beweis: Definiere $G(r) := \int_0^1 t F(tr) \, dt$, so dass $\tilde{F}(r) = G(r) \times r$.

$$r = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\partial_2 \tilde{F}_3 - \partial_3 \tilde{F}_2 \overset{\downarrow}{=} \partial_2 \left(G_1 x_2 - G_2 x_1 \right) - \partial_3 \left(G_3 x_1 - G_1 x_3 \right)$$

$$= 2\, G_1 - x_1 \underbrace{\left(\partial_2 G_2 + \partial_3 G_3 \right)}_{= -\partial_1 G_1 \text{ da } \nabla \cdot G = 0 \text{ wegen } \nabla \cdot F = 0} + x_2 \partial_2 G_1 + x_3 \partial_3 G_1$$

$$= 2\, G_1 + \sum_{j=1}^{3} x_j \partial_j G_1$$

Für den ersten Term gilt nun:

$$2\, G_1 = 2 \int_0^1 t\, F_1(tr)\, dt \quad \text{führt mit part. Int. zu} \ldots$$

$$= \left[t^2 F_1(tr) \right]_0^1 - \int_0^1 t^2 \frac{d}{dt} F_1(tr)\, dt$$

$$= F_1(r) - \int_0^1 t^2 \sum_{i=1}^{3} x_i \partial_i F_1(tr)$$

$$\overset{\uparrow}{=} F_1(r) - \sum_{i=1}^{3} x_i \partial_i G_1(r)$$

$$t \left(\partial_i F_1 \right)(tr) = \partial_i \left(F_1(tr) \right)$$

Zusammengenommen ergibt sich also $\partial_2 \tilde{F}_3 - \partial_3 \tilde{F}_2 = F_1$

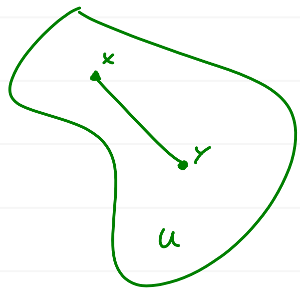
und durch analoges Betrachten der anderen Komponenten schließlich $\nabla \times \tilde{F} = F$. ∎

III. Hauptsätze der Differentialrechnung

III.1. Der Schrankensatz

Satz: Sei $f \in C^1(U,Y)$ eine Abb. zw. Banachräumen, wobei $U \subseteq X$ offen ist, und $x, y \in U$ so, dass $[x,y] := \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\} \subseteq U$. Dann gilt:

$$\|f(y) - f(x)\| \le \|f'\|_{[x,y]} \|y - x\|$$



mit
$$\|f'\|_{[x,y]} := \sup_{z \in [x,y]} \|f'(z)\| = \sup_{z \in [x,y]} \sup_{h \in X} \frac{\|f'(z)h\|}{\|h\|}$$

Beweis: $\Delta := y - x$

$$\begin{aligned}
\|f(x+\Delta) - f(x)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t\Delta)\, dt \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 f'(x+t\Delta)\Delta \, dt \right\| \\
&\le \int_0^1 \|f'(x+t\Delta)\Delta\| \, dt \\
&\le \int_0^1 \|f'\|_{[x,y]} \|\Delta\| \, dt = \|f'\|_{[x,y]} \|\Delta\| \qquad \square
\end{aligned}$$

Korollar: C^1-Abbildungen zw. Banachräumen sind auf kompakten, konvexen Mengen Lipschitz-stetig.

Beweis: Betrachte $f \in C^1(U \subseteq X, Y)$ mit U kompakt & konvex.

Dann gilt nach dem vorigen Satz für $x \neq y \in U$:

$$\frac{\|f(y) - f(x)\|}{\|y - x\|} \le \|f'\|_{[x,y]} \le \|f'\|_U := \sup_{z \in U} \|f'(z)\| \underset{\substack{\uparrow \\ f \in C^1 \,\&\, U \text{ kompakt}}}{<} \infty \qquad \square$$