TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2013S

Sommersemester 2013
Blatt 13
(15.07.2012)

Aufgaben

1. Zusammenhang

Geben Sie den Beweis dafür an, dass das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge wieder zusammenhängend ist.

2. Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$

(a) Wie lautet die Richtungsableitung von f im Ursprung, $\partial_v f(0)$ für $v \in \mathbb{R}^2$?

(b) Ist f im Ursprung differenzierbar? Begründen Sie kurz.

(c) Ist f im Ursprung stetig?

3. Taylorentwicklung

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f(x,y) = x^2 \sin \frac{xy}{2}$ im Entwicklungspunkt $(1,\pi)$ bis zur zweiten Ordnung.

4. Implizit definierte Funktionen

Seien $f_1(t,x,y) = \log x + y^2 t - 4$, $f_2(t,x,y) = x^2 + yt^2 + t^2$ für $t,x,y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, und $P = (1,1,-2)$. Es gilt $f_1(P) = f_2(P) = 0$.

(a) Die Gleichung $f_1(t,x,y) = 0$ kann offenbar in einer Umgebung des Punktes P lokal nach y aufgelöst werden. Man erhält die Funktion $(t,x) \mapsto \tilde{y}(t,x)$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} \tilde{y}(1,1)$.

(b) Der Punkt P ist eine Lösung des Gleichungssystems $f_1(t,x,y) = 0$, $f_2(t,x,y) = 0$. Dieses soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix M muss dazu überprüft werden?

(c) Die lokale Aufösung von $f(t,x,y) = 0 \in \mathbb{R}^2$, $f = \binom{f_1}{f_2}$, nach x und y im Punkt P ergibt die beiden Funktionen $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, definiert in einer Umgebung von $t = 1$. Berechnen Sie $\dot{\bar{x}}(1)$ und $\dot{\bar{y}}(1)$.

5. Extrema mit Nebenbedingungen

Sei $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $g'(t) > 0$ für $t \geq 0$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = g(\|x\|)$. Finden Sie die globalen Maxima und Minima von h unter der Nebenbedingung $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 5$.

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = x^2 \cosh t$.

a) Geben Sie eine Lösung mit dem Anfangswert $x(0) = x_0 > 0$ an. Ist diese Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

b) Geben Sie eine maximale Lösung mit den Anfangswert $x(0) = 0$ an. Ist die Lösung mit dieser Anfangsbedingung eindeutig?

Abgabe der Aufgaben: bis spätestens Freitag, 19.7.2012, 15 Uhr, im Briefkasten im Keller des FMI-Gebäudes