PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2013
Blatt 7
(3.6.2013)
http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2013S

Hausaufgaben

7.1. Gradientenfelder

Für welche Funktionen $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ist das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)),$$

ein Gradientenfeld? Bestimmen Sie ein zu F gehöriges Potential V.

7.2. Ein rotationsfreies Vektorfeld ohne Potential

Gegeben ist das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha(-y, x, 0)$.

(a) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist F rotationsfrei?

(b) Zeigen Sie explizit, dass $D := \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_0^- \times \{0\} \times \mathbb{R})$ sternförmig ist.

(c) Geben Sie für $\alpha = -1$ ein Potential $V : D \to \mathbb{R}$ von $F|_D$ an und zeigen Sie, dass F kein Potential auf seinem gesamten Definitionsbereich besitzt.

7.3. Magnetischer Wirbel

Gegeben ist das Vektorfeld $B : \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$,

$$B(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass B divergenzfrei ist.

(b) Finden Sie ein Vektorfeld $\tilde{A} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3)$ mit $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 0$ und $\operatorname{rot} \tilde{A} = B$.

(c) Berechnen Sie $A(r) := \int_0^1 tB(tr)dt \times r$ und bestätigen Sie, dass $\operatorname{rot} A = B$.

(d) Sind die Vektorpotentiale $\tilde{A}$ und A divergenzfrei?

7.4. Mehrdimensionales Newton-Verfahren, Anwendung

Zu einer Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}^n$ und $\det(J_f(x^*)) \neq 0$ definiert das Newton-Verfahren zum Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ rekursiv die Folge $x_{n+1} := F(x_n)$ mit $F(x) = x - J_f(x)^{-1}f(x)$, falls $\det(J_f(x_n)) \neq 0$ für alle x_n. Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme die Newton-Iteration F explizit an. Skizzieren Sie jeweils die Lösungsmengen der beiden Gleichungen. Finden Sie direkt und durch das Newton-Verfahren eine Lösung.

(a) $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ 2x + y^2 &= 0 \end{aligned}$

Abgabe der Hausaufgaben: 10.6.2013, bis 12:00 im Briefkasten oder in der Zentralübung