## Hausaufgaben

### 5.1. Taylorentwicklungen

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Wie lautet die Taylorreihe von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle + c$ im stationären Punkt $x_0$ von $f$? Man bestimme $x_0$ und $f(x_0)$ explizit.

(b) Entwickeln Sie $f(x, y) = \frac{\ln(1+xy^2)}{1+x-y}$ im Ursprung bis zur dritten Ordnung. Skizzieren Sie den Bereich von $\mathbb{R}^2$, in dem $f$ reell analytisch ist.

### 5.2. Multipolentwicklung

Entwickeln Sie $V(x) = \frac{1}{\|x\|}$ für kleine Abweichungen $\Delta \in \mathbb{R}^n$ von $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bis zur dritten Ordnung in $\Delta$. Ergebnis: (mit $\hat{x} := \frac{x}{\|x\|}$)

$$V(x+\Delta) \;=\; \frac{1}{\|x\|} - \frac{\langle \hat{x}, \Delta\rangle}{\|x\|^2} + \frac{3\langle \hat{x}, \Delta\rangle^2 - \langle \Delta, \Delta\rangle}{2\|x\|^3} + \frac{3\langle \hat{x}, \Delta\rangle\langle \Delta, \Delta\rangle - 5\langle \hat{x}, \Delta\rangle^3}{2\|x\|^4} + \mathcal{O}(\|\Delta\|^4)$$

Hinweis: Man schreibe $\|x+\Delta\| = \sqrt{1+h(\Delta)}$ und verwende die Binomialreihe (Analysis 1, Blatt 5, Z11): $(1+h)^\alpha = \sum\limits_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} h^k$ für $|h| < 1$.

### 5.3. Lagrange-Punkte (http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte)

Das Gravitationspotential des Zweikörpersystems Erde-Mond bezüglich des mitrotierenden Koordinatensystems in der Bahnebene (Schwerpunkt im Ursprung) ist

$$V(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} - \frac{1}{2(1+\mu)^2}(x^2 + y^2).$$

Dabei ist $\mu \in (0, 1)$ das Masseverhältnis Mond/Erde. Die Erdmasse und der Abstand des Mondes zum Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems sind gleich 1 gesetzt. Die Erde befindet sich also im Punkt $(-\mu, 0)$, der Mond bei $(1, 0)$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten von $V$.

(b) Begründen Sie durch Kurvendiskussion von $x \mapsto \nabla V(x, 0)$ (Skizze!), dass auf der $x$–Achse drei stationäre Punkte von $V$ liegen (die Lagrange-Punkte $L_1$, $L_2$ und $L_3$).

(c) Zeigen Sie, dass in den beiden Punkten, die ein gleichseitiges Dreieck mit der Erde und dem Mond bilden, stationäre Punkte von $V$ liegen (Lagrange-Punkte $L_4$ und $L_5$).

(d) Zeigen Sie, dass $L_4$ und $L_5$ lokale Maxima von $V$ sind. Benutzen Sie dazu, dass
$$H_V(L_4) = \frac{\sqrt{3}}{4(1+\mu)^2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 3\frac{1-\mu}{1+\mu} \\ 3\frac{1-\mu}{1+\mu} & -3\sqrt{3}\end{pmatrix}, \qquad H_V(L_5) = \frac{\sqrt{3}}{4(1+\mu)^2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -3\frac{1-\mu}{1+\mu} \\ -3\frac{1-\mu}{1+\mu} & -3\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Analyse der Bewegungsgleichungen im rotierenden Bezugssytem ergibt, dass $L_1, \ldots, L_5$ Ruhepunkte für kleine Himmelskörper sind. Dabei sind $L_1, L_2, L_3$ instabil. $L_4$ und $L_5$ sind für $\mu > \frac{2}{25+3\sqrt{69}} \approx \frac{1}{25}$ stabil. Das liegt an der Coriolis-Kraft, die Massenpunkte auf eine Bahn zwingt, die um den Potentialgipfel bei $L_4$, bzw., $L_5$ kreist. Siehe z.B. http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.pdf.

**Abgabe der Hausaufgaben:** 27.5.2013, bis 12:00 im Briefkasten oder in der Zentralübung