TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Sommersemester 2013
Blatt 3
(6.5.2013)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2013S

Hausaufgaben

3.1. Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung, eindimensional

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion mit $U \subseteq \mathbb{R}$ offen.

(a) Sei $x \in U$ mit $f'(x) \neq 0$. Bestimmen Sie die Position $x' \in \mathbb{R}$ des Schnittpunktes der x-Achse mit der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(x, f(x))$. Sei $x' = F(x)$. Wie lautet die Funktion F und ihre Ableitung?

(b) Sei nun x^* eine Nullstelle von f mit $f'(x^*) \neq 0$. Man zeige, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die Funktion $F : [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon] \to [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

eine Kontraktion ist. Welches sind die Fixpunkte von F?

(c) Berechnen Sie die ersten 5 Folgenglieder der Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$ für $f(x) = x^2 - 2$ mit geeignetem Startwert x_0.

3.2. Produktregel

Bestimmen Sie die Ableitung von $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v(x) = f(x)w(x)$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ als lineare Abbildung und als Matrix.

3.3. Beispiele für Ableitungen

Geben Sie die Ableitung der folgenden Funktionen im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$, jeweils als lineare Abbildung und als Matrix an:

(a) $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $V(x) = \frac{1}{\|x\|}$,

(b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$,

(c) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = a \times x$, $a \in \mathbb{R}^3$,

(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x_1 x_2) + e^{x_1 - x_2^2}$.

3.4. Kugelkoordinaten

Sei $\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$. Φ beschreibt die Transformation auf Kugelkoordinaten. Warum ist Φ differenzierbar?

(a) Berechnen Sie Jacobi-Matrix $J_\Phi(r, \vartheta, \varphi)$.

(b) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\partial_r \Phi$, $\partial_\vartheta \Phi$ und $\partial_\varphi \Phi$ paarweise senkrecht aufeinander stehen.

(c) Bestimmen Sie explizit die drei Vektorfelder

$$\begin{aligned}
v_r &: \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, & v_r(\Phi(r, \vartheta, \varphi)) &:= \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \vartheta, \varphi), \\
v_\vartheta &: \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, & v_\vartheta(\Phi(r, \vartheta, \varphi)) &:= \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}(r, \vartheta, \varphi), \\
v_\varphi &: \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, & v_\varphi(\Phi(r, \vartheta, \varphi)) &:= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(r, \vartheta, \varphi).
\end{aligned}$$

Abgabe der Hausaufgaben: 13.5.2013, bis 12:00 im Briefkasten oder in der Zentralübung