TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Sommersemester 2013
Blatt 2
(29.4.2013)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2013S

Hausaufgaben

2.1. Eigenschaften stetiger Bilder

Seien M, N metrische Räume, $f : M \to N$ stetig und $A \subseteq M$.
Entscheiden Sie jeweils, mit Begründung, ob

(a) aus A offen auch $f(A)$ offen,
(b) aus A abgeschlossen auch $f(A)$ abgeschlossen,
(c) aus A endlich auch $f(A)$ endlich,
(d) aus A kompakt auch $f(A)$ kompakt,
(e) aus A zusammenhängend auch $f(A)$ zusammenhängend,
(f) aus A wegzusammenhängend auch $f(A)$ wegzusammenhängend

folgt.

2.2. Schachtelung kompakter Mengen

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Folge von nichtleeren Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt Schachtelung, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_{n+1} \subseteq A_n$. Der Durchschnitt einer Schachtelung ist $A_\infty = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a) Man zeige: Sind die A_n alle kompakt, so ist A_∞ nichtleer.
(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Schachtelung abgeschlossener Mengen, deren Durchschnitt leer ist.
(c) Geben Sie ein Beispiel für eine Schachtelung beschränkter Mengen, deren Durchschnitt leer ist.

2.3. Zusammenhang

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist M zusammenhängend und $f : M \to \mathbb{R}$ lokal konstant (d.h., jedes $x \in M$ hat eine offene Umgebung U, so dass $f|_U$ konstant ist), dann ist f auf M konstant.
(b) Ist $A \subseteq M$ zusammenhängend, dann auch $\overline{A}$.

2.4. Die stereographische Projektion der Einheitssphäre

Sei $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 | \, \|x\| = 1\}$ die 2-dimensionale Einheitssphäre. Gegeben ist die Funktion $h : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > -1\} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{1+z}(x, y)$.

(a) Begründen Sie an Hand einer Skizze, dass h den Punkt (x, y, z) entlang der Geraden durch den Punkt $(0, 0, -1)$ auf die xy-Ebene projiziert.
(b) Warum ist $f := h|_{S^2}$ stetig?
(c) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$, $g(u, v) = \frac{(2u, 2v, 1-u^2-v^2)}{1+u^2+v^2}$ die Umkehrabbildung von f ist.
(d) Folgern Sie: die punktierte Sphäre $S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ ist homöomorph zur Ebene $\mathbb{R}^2$.

Abgabe der Hausaufgaben: 6.5.2013, bis 12:00 im Briefkasten oder in der Zentralübung