................
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

| | I | II |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| $\Sigma$ | | |

I ................ Erstkorrektur

II ................ Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

# Wiederholungsklausur Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Prof. Dr. M. Wolf

28. September 2012, 08:00 – 09:30 Uhr

Hörsaal: ............. Reihe: ............. Platz: .............

## Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **80 Punkte**

Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

## Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ........ bis ........

Vorzeitig abgegeben um ........

Besondere Bemerkungen:

# Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Topologie** **[8 Punkte]**

Sei $X$ ein nichtleerer topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subseteq X$ offen und für $B \subseteq X$ gilt $B \cap A = \emptyset$, dann gilt auch $\overline{B} \cap A = \emptyset$.

(b) Ist $M \subseteq X$ zusammenhängend, dann ist auch $\overline{M}$ zusammenhängend.

LÖSUNG:

(a) Wegen $A = A^\circ$ gilt:
$A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq X \setminus B \iff A = A^\circ \subseteq (X \setminus B)^\circ \iff A \cap X \setminus (X \setminus B)^\circ = A \cap \overline{B} = \emptyset$. **[2]**

(b) Wir beweisen die Umkehrung: **[2]**
Sei $\overline{M}$ nicht zusammenhängend. Dann gibt es $A, B \subseteq X$ offen und disjunkt $A \cap \overline{M} \neq \emptyset$ und $B \cap \overline{M} \neq \emptyset$ und $\overline{M} \subseteq A \cap B$. **[2]**
wegen (a) folgt, da $A, B$ offen, dass $A \cap M \neq \emptyset$, $B \cap M \neq \emptyset$. Da offenbar $M \subseteq A \cup B$, folgt, dass auch $M$ nicht zusammenhängend ist. **[2]**

2. **Differenzierbarkeit** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ im Ursprung?

$$\partial_v f(0,0) = \begin{cases} \frac{v_1^2-v_2^2}{v_1}, & \text{für } v_1 \neq 0, \\ 0, & \text{für } v_1 = 0 \end{cases}$$ **[2]**

(b) Wie lauten die partiellen Ableitungen im Ursprung?

$\partial_x f(0,0) = 1$ **[1]**

$\partial_y f(0,0) = 0$ **[1]**

(c) Zeigen Sie, dass $f$ im Ursprung unstetig ist.

Für $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$ gilt: **[2]**

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}(\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}-1}{2} = -\frac{1}{2} \neq f(0,0).$ **[2]**

(d) Ist $f$ differenzierbar im Ursprung? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Nein, **[1]**

denn wäre $f$ differenzierbar im Ursprung, so müsste $f$ dort auch stetig sein. **[1]**

LÖSUNG:

(a) $\partial_v f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3 v_1(v_1^2-v_2^2)}{t(t^2v_1^2+t^4v_2^4)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{v_1(v_1^2-v_2^2)}{v_1^2+t^2v_2^4)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } v_1 = 0, \\ \frac{v_1^2-v_2^2}{v_1}, & \text{falls } v_1 \neq 0. \end{cases}$

(b) $\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^3}{h\cdot h^2} = 1$. $\partial_y f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$, oder aus (a) mit $v = (1,0)$ und $v = (0,1)$.

(c) s.o.

(d) s.o.

3. **Ableitung einer Matrixfunktion** **[12 Punkte]**

Begründen Sie, dass für die Funktion $f(A) = (E + A^2)^{-1}$ an der Stelle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = A^{\mathrm{T}}$ definiert und differenzierbar ist. Berechnen Sie $f'(A)(B)$,

HINWEIS: Für $g(A) = A^{-1}$ ist $g'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$, Produktregel, Kettenregel.

LÖSUNG:

Für $A = A^{\mathrm{T}}$ besitzt $A$ nur reelle Eigenwerte, somit besitzt $A^2$ nur Eigenwerte $\geq 0$. Dass heißt, $E + A^2$ ist invertierbar, da alle Eigenwerte $\geq 1$ sind, somit ist $f(A)$ für alle symmetrischen $A$ definiert. **[3]**

$f(A) = g \circ h(A)$ mit $h(A) = 1 + A^2$ differenzierbar, da höchstens quadratisch, **[2]**

$h'(A)(B) = AB + BA.$ **[1]**

Nach dem Hinweis ist $g$ im Punt $E + A^2$ differenzierbar, und man erhält mit der Kettenregel, dass $f$ in $A$ differenzierbar ist, **[2]**

mit

$$\begin{aligned} f'(A)(B) &= (g \circ h)'(A)(B) \\ &\overset{\mathbf{[2]}}{=} g'(h(A))(h'(A)(B)) \\ &\overset{\mathbf{[1]}}{=} -h(A)^{-1}h'(A)(B)h(A)^{-1} \\ &\overset{\mathbf{[1]}}{=} -(1 + A^2)^{-1}(BA + AB)(1 + A^2)^{-1} \end{aligned}$$

4. **Taylorentwicklung** **(9 Punkte)**

Gegeben ist das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} (1+2x^2)e^{x^2-y} \\ -x\, e^{x^2-y} \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $F$ ein Gradientenfeld ist. **(2)**

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Potential von $F$ mit $f(1,1) = -2$. Geben Sie die Hessematrix von $f$ an der Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ an. **(2)**

$$H_f(x,y) = \quad e^{x^2-y} \begin{pmatrix} 2x(2x^2+3) & -(1+2x^2) \\ -(1+2x^2) & x \end{pmatrix}$$

(c) Wie lautet die Taylorentwicklung $(s,t) \mapsto f(1+s, 1+t)$ bis zur zweiten Ordnung an der Stelle $(s,t) = (0,0)$ mit $f$ aus Teilaufgabe (b)? **(5)**

$$f(1+s,1+t) = \left\{ \begin{matrix} -2 + \binom{3}{-1} \cdot \binom{s}{t} + \frac{1}{2}\binom{s}{t} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)\binom{s}{t} \\ \text{oder} \\ -2 + 3s - t + 5s^2 - 3st + \frac{1}{2}t^2 \end{matrix} \right\} + \mathcal{O}(\|\tbinom{s}{t}\|^3)$$

Lösung:

(a) $F$ ist offenbar stetig differenzierbar. $\partial_x F_2(x,y) = -(1+2x^2)e^{x^2-y} = \partial_y F_1(x,y)$, die Jacobi-Matrix von $F$ ist also symmetrisch. Da $\mathbb{R}^2$ sternförmig ist, besitzt $F$ ein Potential, ist also ein Gradientenfeld.

(b) $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = F(x,y)$, Man berechnet die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y)\ \partial_{yx} f(x,y) \\ \partial_{xy} f(x,y)\ \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = J_F(x,y).$$

(c) $f(1+s,-1+t) = f(1,1) + \operatorname{grad} f(1,1) \cdot \binom{s}{t} + \frac{1}{2}\binom{s}{t} \cdot H_f(1,1)\binom{s}{t} + \mathcal{O}(\|\binom{s}{t}\|^3)$ mit $f(1,1) = -2$, $\operatorname{grad} f(1,1) = F(1,1) = \binom{3}{-1}$, und $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. **Implizit definierte Funktionen** **(9 Punkte)**

Gegeben sind die Gleichungen

$$x + y + \sin z = 0,$$
$$3\sin x - 2\tan y - z = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass man dieses Gleichungssystem im Ursprung lokal gleichzeitig nach $y$ und $z$ auflösen kann und berechnen Sie die erste Ableitung der so implizit definierten Funktion $x \mapsto g(x)$ im Punkt $x = 0$.

(b) Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems werde im Ursprung lokal als Kurve im $\mathbb{R}^3$ durch $x$ parametrisiert. Geben Sie mit Hilfe von (a) den Einheitstangentialvektor an diese Kurve im Ursprung an.

LÖSUNG:

(a) Das Gleichungssystem entspricht der Gleichung $f(x,y,z) = 0 \in \mathbb{R}^2$ mit der stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y + \sin z \\ 3\sin x - 2\tan y - z \end{pmatrix}$. **[1]**

Es gilt $f(0,0,0) = 0$ und $Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. **[2]**

Die Untermatrix der Jacobi-Matrix von $f$,

$$\frac{\partial f}{\partial(y,z)}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar. **[1]**

Somit sind die Gleichungen nach $y$ und $z$ im Ursprung lokal auflösbar. Die so implizit definierte Funktion $g : ]-\epsilon, \epsilon[ \to \mathbb{R}^2$ hat im Ursprung die Ableitung

$$Dg(x) = -\left(\tfrac{\partial f}{\partial(y,z)}(0,0,0)\right)^{-1} \tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**[3]**

(b) Die Lösungskurve wird in einer Umgebung des Ursprungs parametrisiert durch **[1]**

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

mit der implizit definierten Funktion $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ aus (a) und $g_1'(0) = 4$, $g_2'(0) = -5$. Somit ist der Einheitstangentialvektor im Ursprung

$$T = \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**[1]**

6. **Globale Minima und Maxima** **(16 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $f$ und entscheiden Sie, ob diese isolierte Maxima oder Minima sind.

(b) Sei nun $B = [0, 2]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie $\sup f(B)$ und $\inf f(B)$.

LÖSUNG:

(a) $f$ ist als Polynom beliebig oft differenzierbar. Stationäre Punkte sind Lösungen von **[2]**

$$0 = \operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{pmatrix},$$

also $x^2 = y$ und $y^2 = x$. Eingestzt also $x^4 - x = 0$ mit den reellen Lösungen $x = 0$ und $x = 1$. Die stationären Punkte sind also
$P_1 = (0, 0)$und $P_2 = (1, 1)$. **[2]**

Die Hessematrix von $f$ ist $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$. **[1]**

Nun ist $H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ mit negativer Determinante $-9$. $P_1$ ist ein Sattelpunkt. **[2]**

$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ hat positive Determinante und Diagonaleinträge, ist somit positiv definit, $P_2$ ist ein lokales isoliertes Minimum von $f$. **[2]**

(b) $f$ ist stetig auf dem Kompaktum $B$. Maximum und Minimum werden also angenommen. **[1]**
Kandidaten dafür sind die stationären Punkte im Inneren, also $P_2$, mit $f(P_2) = -1$ und der Rand von $B$. **[1]**
An den Ecken des Quadrats gilt $F(0, 0) = 0$, $F(2, 0) = F(0, 2) = 8$ und $F(2, 2) = 4$. **[1]**
Auf den Koordinatenachsen gilt $F(t, 0) = F(0, t) = t^3$. Dort gibt es also im Inneren, $t \in ]0, 2[$ keine weiteren Kandidaten für absolute Maxima und Minima. Auf den anderen beiden Randlinien gilt $g(t) = f(t, 2) = f(2, t) = 8 + t^3 - 6t$ mit $t \in [0, 2]$. **[1]**
Kandidaten für Extremwerte sind die Randpunkte $t = 0$, $t = 2$ und Lösungen von $0 = g'(t) = 3t^2 - 6$, also nur $t = \sqrt{2}$. **[1]**
Es gilt $f(\sqrt{2}, 2) = f(2, \sqrt{2}) = 8 - 2\sqrt{2} \in [0, 6]$ dies sind also keine Kandidaten für das absolute Maximum oder Minimum. **[1]**
Denn $F(P_2) = -1$ ist der kleinste gefundene Wert, und $F(2, 0) = F(0, 2) = 8$ ist der größte gefundene Wert. Somit ist $\inf F(B) = -1$ und $\sup F(B) = 8$. **[1]**

7. **Kurven** **(8 Punkte)**

Ein Abschnitt der Kettenlinie ist gegeben durch die Funktion $f : [0, \infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh x$.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung $\gamma : [0, \infty[ \to \mathbb{R}^2$ des Graphen von $f$ als Kurve im $\mathbb{R}^2$ an.

(b) Parametrisieren Sie $\gamma$ auf Bogenlänge.

LÖSUNG:

(a) $\gamma(t) = \binom{t}{\cosh t}$, $t \geq 0$ **[2]**

(b) Wir berechnen die Bogenlänge von $\gamma$,

$$s(t) = \int\limits_0^t \|\gamma(t')\| dt' = \int\limits_0^t \sqrt{1 + \sinh^2 t'} dt' = \int\limits_0^t \cosh t' dt' = \sinh t.$$

**[2]**

mit der Umkehrabbildung $t(s') := s^{-1}(s') = \operatorname{arsinh}(s')$. **[1]**

Die Parametrisierung auf Bogenlänge lautet dann

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(s) \\ \cosh(\operatorname{arsinh}(s)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(s) \\ \sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh}(s))} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(s) \\ \sqrt{1 + s^2} \end{pmatrix}.$$

**[3]**

8. **Separierbare Differentialgleichung** **(8 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{|1-x^2|}$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Anfangswerte $x(0)$ zur Zeit $t = 0$ ist $x(t) = x(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung? **(2)**

$$x(0) \in \left\{ \quad -1, 1 \quad \right\}$$

(b) Bestimmen Sie für den Anfangswert $x(0) = 0$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.
Hinweis: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in [-1, 1]$. **(4)**

$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \sin t & \text{für } -\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{für } \frac{\pi}{2} < t, \end{cases}$$

(c) Ist die Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = -1$ eindeutig bestimmt? Begründen Sie kurz Ihre Antwort. **(2)**

Lösung:

(a) Ist eine Lösung $x(t) = c$ konstant so folgt $\dot{x}(t) = 0$, also $\sqrt{1-x(t)^2} = 0$, somit $x(t) = x(0) = \pm 1$. Dies sind offenbar auch Lösungen.

(b) Trennung der Variablen im Bereich $x \in ]-1, 1[$ führt auf das Integral

$$G(x) := \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = t - t_0$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist $G(x) = \arcsin(x)$, definiert für $x \in ]-1, 1[$

Einsetzen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert $G(0) = 0 = 0 - t_0$, also $t_0 = 0$. Auflösen von $G(x) = t$ für $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ nach $x$ liefert das Ergebnis $x(t) = \sin t$. Dieses kann nach links durch $x(t) = -1$ für $t \leq -\frac{\pi}{2}$ und nach rechts durch $x(t) = 1$ für $t \geq \frac{\pi}{2}$ stetig differenzierbar fortgesetzt werden.

(c) Nein, die Lösung ist nicht eindeutig. Neben $x(t) = -1$ ist z.B. auch $x(t-5)$ mit dem $x(t)$ aus (b) eine Lösung des Anfangswertproblems.
Das liegt daran, dass $\sqrt{1-x^2}$ bei $x = \pm 1$ nicht Lipschitzstetig ist.