TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Sommersemester 2012
Probeklausur
(25.06.2011)

- Schreiben Sie bitte Name, Matrikelnummer und die Tutorgruppe für die Rückgabe auf jeden Bearbeitungsbogen.
- Nummerieren Sie die Lösungen der Aufgaben deutlich.
- Bei Kästchen- und Multiple-Choice-Aufgaben zählt nur das Ergebnis.

Aufgaben

1. Topologie

Sei X ein topologischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, heißt *lokal beschränkt*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung von x gibt, auf der f beschränkt ist. Zeigen Sie:

(a) Ist X kompakt, so ist jede lokal beschränkte Funktion beschränkt.

(b) Es gibt lokal beschränkte Funktionen, die nicht beschränkt sind.

2. Differenzierbarkeit

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Für den Punkt $a = (0,0)$ und den Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ berechne man die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$ und damit die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} f(a)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(a)$.

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist.

3. Ableitung einer Matrixfunktion

Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f(A) = (\mathbb{1} + A)(\mathbb{1} - A)^{-1}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbb{1} - A$ invertierbar, gegeben ist durch $f'(A)(B) = 2(\mathbb{1} - A)^{-1}B(\mathbb{1} - A)^{-1}$.
HINWEIS: Für $g(A) = A^{-1}$ ist $g'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$, Produktregel, Kettenregel.

4. Taylorentwicklung

(a) Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x,y) = \frac{1}{1+x+y^2}$ im Ursprung bis zur dritten Ordnung an.

$$f(x,y) = \qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(\sqrt{x^2+y^2}^4)$$

(b) Sei $g(x,y,z) = \frac{1}{1-x-y-z}$. Wie lautet $\partial_x^5 \partial_y^8 \partial_z^3 g(0,0,0)$?

☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{16!}$ ☐ $\dfrac{1}{5!8!3!}$ ☐ 1 ☐ $5!8!3!$ ☐ $16!$

Bitte wenden!

5. Lokale Extrema

Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte von $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

6. Stetigkeit, Anwendung des Satzes von Fubini

(a) Zeigen Sie: $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^y$ lässt sich durch $f(0, y) := 0$ auf $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ stetig fortsetzen.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ mit $0 < a < b$. HINWEIS: Schreiben Sie den Integranden als bestimmtes Integral der Funktion $y \mapsto x^y$.

7. Implizite Funktionen

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ und $M_c := f^{-1}(\{c\})$, $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und regulären Werte von f.

(b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist M_c eine Untermannigfaltigkeit?

(c) Bestimmen Sie alle Punkte der Menge $\{f(x, y) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, die sich *nicht* mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen lokal nach y auflösen lassen.

(d) Skizzieren Sie die Bereiche des $\mathbb{R}^2$, in denen die durch $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, implizit definierte Funktion $\hat{y}(x)$ streng monoton steigend, bzw., fallend ist.

8. Extrema mit Nebenbedingungen

Bestimmen Sie die maximale Fläche eines rechteckigen Geheges mit den Seitenlängen $a, b \geq 0$, unter der Nebenbedingung, dass ein Zaun, der drei Seiten des Geheges begrenzt, die feste Länge $L > 0$ hat. (Die vierte Seite mit der Länge a verläuft entlang einer Mauer.) Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Viel Erfolg!