PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2012
Blatt 11
(02.07.2012)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Hausaufgaben

11.1. Ein Zykloidenstück, auf Bogenlänge parametrisiert

Gegeben ist das Zykloidenstück $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = r \begin{pmatrix} t + \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, $r > 0$

(a) Veranschaulichen Sie γ in einer Skizze.

(b) Ist γ regulär?

(c) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ von γ und $L(\gamma)$.

(d) Parametrisieren Sie γ auf Bogenlänge um.

11.2. Bogenlänge in verschiedenen Parametrisierungen

Berechnen Sie $L(\gamma)$, wenn die Kurve γ im $\mathbb{R}^2$

(a) einmal in karthesischen Koordinaten, $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix}$, $h \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, bzw.,

(b) in Polarkoordinaten, $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$, $r \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^+)$,

gegeben ist.

11.3. Einige Identitäten der Vektoranalysis

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $F, G \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

a) $\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g)$

b) $\nabla \cdot (fF) = (\nabla f) \cdot F + f(\nabla \cdot F)$

c) $\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G)$

d) $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$

e) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

11.4. Magnetischer Wirbel

Gegeben ist das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$,

$$v(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass v divergenzfrei ist.

(b) Berechnen Sie mit der Formel aus der Vorlesung ein Vektorfeld A, so dass $\operatorname{rot} A = v$.

(c) Finden Sie ein Vektorfeld $\tilde{A} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3)$ mit $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 0$ und $\operatorname{rot} \tilde{A} = v$.

Abgabe der Hausaufgaben: 09.07.2012, bis 12:00 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung