TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Sommersemester 2012
Blatt 9
(18.06.2012)

Hausaufgaben

9.1. Tangentialraum

Gegeben ist die Menge $M := \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, ein Ellipsoid mit den Halbachsen $a, b, c > 0$, und der Punkt $P = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}) \in M$.

(a) Warum ist M eine Untermannigfaltikeit des $\mathbb{R}^3$?

Bestimmen Sie auf zwei Arten eine Orthonormalbasis des Tangentialraums $T_P M$ und ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$,

(b) einmal durch Parametrisierung der Fläche in einer Umgebung von P, und

(c) in dem Sie M als Urbild eines regulären Wertes der Funktion $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ beschreiben.

9.2. Die Lorentzgruppe

(a) Zeigen Sie: die Lorentzgruppe $M = \mathbf{O}(3, 1) := \{X \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid X\mu X^{\mathrm{T}} = \mu\}$, mit $\mu = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ist eine 6–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{4\times 4}$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B_i, $i = 1, \dots, 6$, des Tangentialraums $T_{\mathbb{1}} M$ an die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$.

(c) Zeigen Sie, dass $e^{\alpha B_i} \in M$ für $i = 1, \dots, 6$, $t \in \mathbb{R}$.

9.3. Extrema mit Nebenbedingung

Gesucht ist das achsenparallele Rechteck größten Flächeninhalts, das vollständig innerhalb der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

liegt, $a, b > 0$. Bestimmen Sie die Kantenlängen und den Flächeninhalt dieses Rechtecks, indem Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren verwenden.

9.4. Extrema mit Nebenbedingungen

Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

(a) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, die vom Punkt $(1, 1, 1)$ den kleinsten bzw. größten Abstand haben.

(b) Wie lauten die Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x - 3y + 5z$, auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Abgabe der Hausaufgaben: 25.06.2012, bis 12:00 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung