TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Sommersemester 2012
Blatt 2
(30.04.2012)

Hausaufgaben

2.1. Die Vereinigung zusammenhängender Mengen

Seien M, N zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raums X. Zeigen Sie: Ist $M \cap N \neq \emptyset$, dann ist $M \cup N$ zusammenhängend. Gilt die Aussage auch für die Vereinigung beliebig vieler zusammenhängender Mengen mit nichtleerem Schnitt?

2.2. Zusammenhang und Wegzusammenhang

(a) Sei $A := \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$. Zeigen Sie: A ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

(b) Beweisen Sie die Bemerkung aus der Vorlesung: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, so ist A wegzusammenhängend. Hinweis: Zeigen Sie, dass die Wegzusammenhangskomponenten offen sind.

2.3. Schachtelung kompakter Mengen

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Folge von nichtleeren Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt Schachtelung, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_{n+1} \subset A_n$. Der Durchschnitt einer Schachtelung ist $A_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a) Man zeige: Sind alle A_n kompakt, so ist A_∞ nichtleer.

(b) Finden Sie ein Beispiel mit $A_\infty = \emptyset$, wenn alle A_n beschränkt sind.

(c) Finden Sie ein Beispiel mit $A_\infty = \emptyset$, wenn alle A_n abgeschlossen sind.

2.4. Einpunktkompaktifizierungen

(a) Zeigen Sie, dass die Einpunktkompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^n ist, für $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Verallgemeinern Sie die stereographische Projektion auf den $\mathbb{R}^n$.

(b) Was ist die Einpunktkompaktifizierung von $U_1(0) \subset \mathbb{R}^2$?

(c) Was ist die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$?

(d) Was ist die Einpunktkompaktifizierung von $S^1 \subset \mathbb{C}$?

2.5. Homöomorph oder nicht?

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengenpaare als topologische Räume homöomorph sind:

(a) $\mathbb{R}^2$ und $\{x \in \mathbb{R}^2 | \ \|x\| < 1\}$ (b) $(0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $\{x \in \mathbb{R}^2 | \ \|x\| < 1\}$

(c) $[0, 1]$ und $[0, 1)$, (d) $[0, 1]$ und S^1 (e) S^2 und $\mathbb{C}$ (f) S^2 und $\widehat{\mathbb{C}}$

Abgabe der Hausaufgaben: 07.05.2012, bis 12:00 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung