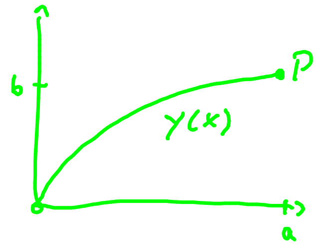
Bsp. ② „Fermatsches Prinzip":

„Bei geg. Start-/Zielpunkt folgt ein Lichtstrahl einem Weg mit stationärer Laufzeit."

- Laufzeitfunktional: (ähnlich Bsp. ①)



$$F(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{v(x,y)}\,dx$$

$$n(x,y) := \frac{1}{v(x,y)}$$ heißt „Brechungsindex"

- Annahme: $n(x,y) = n(y)$ (z.B. Abnahme mit der Höhe wegen dünnerer Atmosphäre)

Dann ist $\boxed{L(y,y') = n(y)\sqrt{1+y'(x)^2}}$ und die Euler-Lagrange Gl. lautet $\frac{\partial}{\partial y} L = \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} L$

$$n'\sqrt{1+y'^2} \overset{EL}{=} \frac{d}{dx}\left(n(y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = n'\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + n\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{ny'^2y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad n'(1+y'^2)^2 = n'y'^2(1+y'^2) + ny''(1+y'^2) - ny'^2y''$$

- $\Leftrightarrow \quad \boxed{n'(1+y'^2) = ny''}$

- Konsequenz 1: ist $n'<0$, so ist wegen $n>0$ auch $y''<0$, der Lichtstrahl $y(x)$ verläuft also konkav.

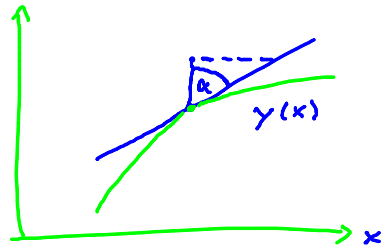
$\to$ Man sieht die Sonne noch, wenn sie schon untergegangen ist.

∘ Konsequenz 2: „Gesetz von Snellius" $\boxed{n(y)\cdot \sin\alpha = \text{const.}}$

<u>Beweis:</u> $L(y,y') = n(y)\sqrt{1+y'^2}$

hängt nicht explizit von x ab.

$$\to \ \text{const} \overset{!}{=} L - y'\frac{\partial L}{\partial y'}$$



$$= n\sqrt{1+y'^2} - y'^2 n \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{1+y'^2}}$$ ist erstes Integral d.h. konst. entlang jeder Lösung $y(x)$ der E.L. Gl.

außerdem gilt: $$y'^2 = \frac{\cos(\alpha)^2}{\sin(\alpha)^2} = \frac{1}{\sin(\alpha)^2} - 1$$

und damit $$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

□

<u>Noether's Theorem: Symmetrien & Erhaltungssätze</u>

<u>Def.:</u> Sei $L \in C^2([0,1]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ Lagrangefunktion auf einem Funktionenraum V, $f \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ & $f_s(x) := f(s,x)$.

Wir nennen L „<u>invariant</u>" bzgl. f, wenn $\forall q \in V$, $\forall t \in [0,1]$,

$$\forall r \in \mathbb{R}: \quad \frac{\partial}{\partial s} L\left(t, f_s\circ q, \frac{d}{dt} f_s \circ q\right)\Big|_r = 0$$

Wenn zudem $f_0(x) = x$, dann nennen wir f eine „<u>kontinuierliche Symmetrie</u>" von L.

<u>Korollar:</u> Sei f eine Kont. Sym. von L. Dann gilt

$q \in V$ löst E.L. von L $\Rightarrow$ $\forall s \in \mathbb{R}$ $Q_s := f_s \circ q$ löst E.L. von L

Satz [Noether's Theorem] Ist ϕ eine kont. Symmetrie von L, dann ist

$\boxed{I(t,q,\dot q) := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \frac{\partial}{\partial s} \phi_i(s,q)\Big|_{s=0}}$ erstes Integral der Euler-Lagrange Gleichung. D.h., wenn $q(t)$ eine Lösung von EL ist, dann gilt entlang dieser: $\frac{dI}{dt}(t,q(t),\dot q(t)) = 0$.

Beweis: $Q_s := \phi_s \circ q$, $Q(s,t) := \phi_s(q(t))$

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial s} L\left(t, Q_s(t), \dot Q_s(t)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_i}(t,Q_s,\dot Q_s) \frac{\partial Q_i(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(t,Q_s,\dot Q_s)\frac{\partial \dot Q_i(s,t)}{\partial s}$$

$$\overset{EL}{=} \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(t,Q_s,\dot Q_s)\right)\frac{\partial Q_i(s,t)}{\partial s} + \text{—''—} \quad \text{—''—}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(t,Q_s,\dot Q_s)\frac{\partial Q_i(s,t)}{\partial s}\right)$$

ausgewertet bei $s=0$ ergibt dies

$$\text{const} \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(t,q,\dot q)\frac{\partial}{\partial s}\phi_i(s,q)\Big|_{s=0} = I(t,q,\dot q) \qquad \square$$

Bsp.: ∘ Hängt $L = L(t,\dot q)$ nicht explizit von q ab, dann ist L invariant bzgl. $\phi_s(q) = q + s e_i$, wobei $e_i \in \mathbb{R}^m$ Einheitsvektor ist.

Damit ist $\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \text{const.}}$ $\forall i$ „Impulserhaltung"

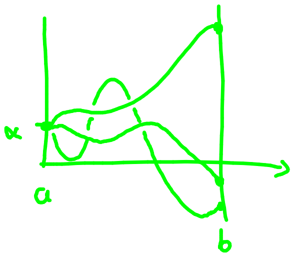
∘ Analog impliziert Invarianz bzgl. Drehung die Drehimpulserhltg.

Bemerkungen zu den Randbedingungen

- Randbedingungen für $q:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ von der Form $q(a)=\alpha$ heißen „Dirichlet-Randbedingungen" ($\dot q(a)=\alpha$ wäre „Neumann-Randbed.")

- Betrachte $\frac{d}{d\varepsilon}F(q+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} \overset{!}{=} 0$ für alle h so dass

$$q+\varepsilon h \in \{ f\in C^2([a,b],\mathbb{R}) \mid f(a)=\alpha \}$$



d.h. „freie" Randbedingung bei b

& Dirichlet " bei a.

Wenn $F(q)=\int_a^b L(t,q,\dot q)\,dt$, dann führt dies auf

$$0 \overset{!}{=} \int_a^b \left(\partial_2 L(t,q,\dot q)h + \partial_3 L(t,q,\dot q)\dot h\right) dt$$

part. Int.

$$= \int_a^b \left(\partial_2 L - \frac{d}{dt}\partial_3 L\right) h \, dt + \left[h\,\partial_3 L\right]_a^b \quad (*)$$

$\Rightarrow$ (i) $\boxed{\partial_2 L - \frac{d}{dt}\partial_3 L = 0}$ wenn wir $(*)$ anwenden für alle $h\in C^2$ mit $h(a)=h(b)=0$

$\Rightarrow$ (ii) $\boxed{\partial_3 L(t,q,\dot q)\Big|_{t=b} = 0}$ wenn wir in $(*)$ (i) & $h(a)=0$, $h(b)\neq 0$ verwenden.

Falls beide Randbedingungen frei sind, muß (ii) für $t=b$ und $t=a$ gelten.