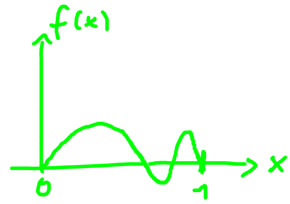
# Variationsrechnung & Euler-Lagrange-Gleichungen

**Def.:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt eine Abbildung $F: V \to \mathbb{K}$ ein „Funktional". (Wir betrachten $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)




**Bsp.:** • $V = \{ f \in C^1([0,1]) \mid f(0) = f(1) = 0 \}$

$$F(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \quad \left( = \text{Länge der Kurve } \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right)$$

$F$ ist also „Funktion auf Funktionen"

• Bsp. aus der Physik: „Wirkung" ... später mehr ...

**Grundlegendes Problem der „Variationsrechnung":**

Minimierung von Funktionalen ggfs. unter Nebenbedingungen

Damit $F$ bei $x \in V$ ein Min. in $U \subseteq V$ annehmen kann, muß (falls $F \in C^1$)

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(x + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = F'(x)h = 0 \quad \forall h \in V \text{ für die } x + \varepsilon h \in U$$

d.h. $x$ muß stationärer Punkt sein.

Eine wichtige Klasse von Funktionalen ist von der Form

$$\boxed{F(q) = \int_0^1 L(t, q(t), \dot{q}(t))\, dt} \quad \text{wobei}$$

• $L \in C^2([0,1] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ „Lagrange-Funktion" heißt,

• $q: [0,1] \to \mathbb{R}^m$ aus einem $C^1$-„Funktionenraum" $V$ ist,

den es noch näher zu spezifizieren gilt.

Für's erste: $m=1$ und $V := \{ f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0)=f(1)=1 \}$

Stationarität bei $x \in V$ bedeutet $\forall h \in V$:

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} F(x+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} \overset{L\in C^1}{=} \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon} L\big(t, x(t)+\varepsilon h(t), \dot{x}(t)+\varepsilon \dot{h}(t)\big)\Big|_{\varepsilon=0} dt$$

$$= \int_0^1 \Big( \partial_2 L(t,x,\dot{x})\, h + \partial_3 L(t,x,\dot{x})\, \dot{h} \Big)\, dt$$

$$= \int_0^1 \Big( \partial_2 L(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt}\partial_3 L(t,x,\dot{x}) \Big)\, h \; dt \qquad (1)$$

part. Int. mit
$h(0)=h(1)=0$ und $L, x \in C^2$

<u>Lemma:</u> [du Bois-Reymond] Ist $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ und gilt für alle $h \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ mit $h(0)=h(1)=0$

$$\int_0^1 f(x)\, h(x)\, dx = 0 \; , \text{ dann ist } f \equiv 0.$$

<u>Beweis:</u> Angenommen $f(\tilde{x}) > 0$ für $\tilde{x} \in (0,1)$. Wegen Stetigkeit gibt es $[a,b] \subseteq [0,1]$, so dass $f(x) \geq \frac{1}{2} f(\tilde{x})$ $\forall x \in [a,b]$. Wähle z.B.

$$h(x) := \begin{cases} (x-a)^4(x-b)^4 & , x \in [a,b] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} . \text{ Dann ist}$$

$$\int_0^1 f(x)\, h(x) \geq \frac{1}{2} f(\tilde{x}) \int_a^b h(x)\, dx > 0 \quad \lightning$$

$\square$

Bem.: Tatsächlich genügt $h \in C^\infty$

<u>Satz:</u> $F: V \to \mathbb{R}$ ist in $x \in V$ genau dann stationär, wenn $x$ in $[0,1]$ die „<u>Euler-Lagrange Gleichung</u>"

$$\boxed{\partial_2 L(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt} \partial_3 L(t, x(t), \dot{x}(t))}$$ erfüllt.

<u>Beweis:</u> Lemma angewendet auf (1) $\square$

**Bemerkungen:**

- man liest/schreibt oft kurz „$\frac{\partial}{\partial x} L = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L$".
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\right)\ddot{x}$
- der Satz gilt auch für die Minimierung über $f \in C^2([a,b])$ mit $f(a) = c_1$ und $f(b) = c_2$, da $f + \varepsilon h$ diese Randbedingungen erfüllt g.d.w. $h(a) = h(b) = 0$.
- Physik: in „konservativen Systemen", wenn $L = T - U$, gilt das „Hamilton Prinzip" (= Prinzip extr. Wirkung), das besagt, dass die „Wirkung"

$$S(q) := \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q})\, dt$$

extremal sein muß.

- $x(t) \in \mathbb{R}^m$ führt auf die Euler-Lagrange-Gl.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

**Satz:** Hängt $L = L(x, \dot{x})$ nicht explizit von $t$ ab, so ist

$$\boxed{H := \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L - L} = \dot{x}(t)\, \partial_2 L(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t))$$

ein erstes Integral der E.-L. Gl., d.h. $H = c = \text{konst.}$ längs jeder Lösung $x(t)$.

**Beweis:** $\frac{d}{dt}\left(L - \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\right) \overset{L = L(x,\dot{x})}{=} \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} L + \ddot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L - \ddot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L - \dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L \overset{\text{E.-L.}}{=} 0$ $\square$

**Bemerkungen:**

- $H$ heißt in der Physik „Hamiltonfkt.", $H = c$ „Energieerhaltung"
- Dies ist ein Spezialfall von „Noether's Theorem"
- mögliche Lösungsstrategie:
  - Auflösen von $H(x, \dot{x}) = c$ nach $\dot{x} = \phi(c, x)$
  - Trennung der Variablen → „$t = \int \frac{1}{\phi(c,x)}\, dx$"

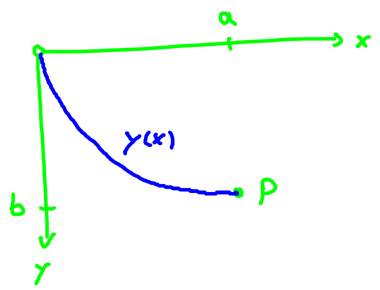
## Beispiele:

① „Brachistochrone"

- aufgeworfen von Galileo, der beobachtete, dass es sich auf einem $\frac{1}{4}$-Kreis schneller rutschen lässt, als auf einer schiefen Ebene.
- gelöst von Johann Bernoulli
- gilt als Ursprung der Variationsrechnung

- Start bei 0 mit $v=0$.
- Energieerhaltung $\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = gy$

  $\Rightarrow v = \sqrt{2gy}$ , $y = y(x)$




- $F(y)$ = „Zeit von 0 bis P"

$$= \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx$$

Bogenlänge

Geschw.

$$=: \int_0^a \underbrace{L(x,y,y')}_{=L(y,y')}\,dx$$

- $F(y)$ stationär, wenn $y$ die E.-L. Gl. $\frac{\partial}{\partial y}L = \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}L$ erfüllt.
- Da $L$ nicht explizit von $x$ abh., gilt entlang jeder Lsg. $y(x)$:

$$c \overset{!}{=} y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} - \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

$$= -\left[(1+y'^2)(2gy)\right]^{-1/2}$$

D.h. $2gc^2y(1+y'^2) \overset{①}{=} 1$ und damit $0 \leq 2gc^2y \leq 1$

Wir parametrisieren die Kurve durch $x(t), y(t)$ wobei $y(t) = y(x(t))$, so dass wegen $\frac{d}{dt}y(t) = y'(x(t))\,\dot{x}(t)$ gilt

$y' \overset{②}{=} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Setze $y(t) \overset{③}{=} k(1-\cos t)$, $k := \frac{1}{4gc^2}$. Dann ist

$$\dot{x}(t) \overset{2}{=} \frac{\dot{y}}{y'} \overset{1,3}{=} \frac{k\sin t}{\sqrt{\frac{2k}{y}-1}} = \frac{k\sin t\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}} = \underline{\underline{k(1-\cos t)}}$$

Damit ist die „Zykloide" (= Abrollkurve)

$$x(t) = k(t - \sin t),$$
$$y(t) = k(1 - \cos t), \quad t \in [0, T]$$

eine Lösung des Brachistochronenproblems, falls $k$ & $T$ so gewählt werden, dass $k(T - \sin T) = a$

und $k(1 - \cos T) = b$.

Bemerkungen:

- Da $y$ nach unten pos. gewählt wurde, steht die Zykloide auf dem Kopf.
- $y'(0) = \infty$
- Die Kurve hängt nicht von $g$ ab.
- Die Zykloide ist auch „Tautochrone", d.h. von jedem Punkt aus wird die gleiche Zeit bis zum Tiefpunkt benötigt.