Taylorentwicklung

... erst etwas Multiindexnotation:

Def.:
- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ „Multiindex"
- $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ „Grad" des Multiindex
- $\alpha! := \prod_{i=1}^n (\alpha_i!)$
- $x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n)$
- $D^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$
- $\alpha \leq \beta :\Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$
- $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$
- $\binom{k}{\alpha} := \frac{k!}{\alpha!}$ für $|\alpha| = k$
- $\alpha \pm \beta := (\alpha_1 \pm \beta_1, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$

Bsp.:
- $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$
- $x_i = x^{e_i}$ mit $e_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots 0)$, $D^{e_i} = \partial_i$
- $D^\alpha x^\alpha = \alpha!$
- „Binomischer Satz" $(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha-\beta}$ für $x, y \in \mathbb{C}^n$
- „Multinomialtheorem" $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^k = \sum_{|\alpha|=m} \binom{k}{\alpha} x^\alpha$

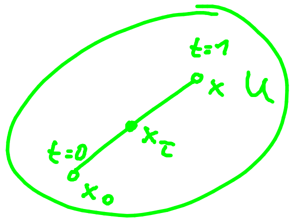
  für $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$

Beweise: $\rightarrow$ Übung

Satz: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, $f \in C^{r+1}(U, \mathbb{R})$ und $x_t := xt + (1-t)x_0 \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gibt es ein $\tau \in [0,1]$, so dass

$$f(x) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le r} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha}_{\text{Taylorpolynom vom Grad } r} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = r+1} \frac{D^\alpha f(x_\tau)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha}_{\text{Restglied}}$$

Beweis: $\Delta := x - x_0$, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_0 + t\Delta)$



Dann ist $g(1) = f(x)$ und wir wissen $\exists \tau \in (0,1)$:

$$f(x) = g(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(r+1)}(\tau)}{(r+1)!}$$

z.z.: $$g^{(k)}(t) = k! \sum_{|\alpha| = k} \frac{D^\alpha f(x_0 + t\Delta)}{\alpha!} \Delta^\alpha$$

Induktion über k: $k = 0$ ✓

$$g^{(k+1)}(t) = \frac{d}{dt} g^{(k)}(t) = k! \sum_{|\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} \frac{d}{dt} D^\alpha f(x_0 + t\Delta) \Delta^\alpha$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} k! \sum_{|\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha}_{= D^{\alpha + e_i}} f(x_0 + t\Delta) \underbrace{\Delta_i \Delta^\alpha}_{= \Delta^{\alpha + e_i}}$$

$$\overset{|\alpha + e_i| = k+1}{=} \sum_{|\beta| = k+1} c_\beta D^\beta f(x_0 + t\Delta) \Delta^\beta$$

mit $$c_\beta := \sum_{i : \beta_i > 0} \frac{k!}{(\beta - e_i)!} \overset{\beta! = (\beta - e_i)!\beta_i}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{k!\, \beta_i}{\beta!} = \frac{k!}{\beta!} |\beta| = \frac{(k+1)!}{\beta!}$$

$\square$

Korollar: Sei unter obigen Annahmen $R_r(x)$ das Restglied, dann gilt

$$R_r(x) = O\left(\|x-x_0\|^{r+1}\right) \text{ für } x \to x_0 .$$

Beweis:

$$R_r(x) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_\tau)(x-x_0)^\alpha$$

Die Abl. sind auf U beschränkt (da stetig) und es gilt

$$(x-x_0)^\alpha = \prod_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^n \|x-x_0\|^{\alpha_i} = \|x-x_0\|^{r+1}$$

$\square$

Bemerkung:
- Die „Taylorreihe" $\sum_{|\alpha| \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha$ konvergiert gegen $f(x)$ g.d.w. $\lim_{r\to\infty} R_r(x) = 0$ und f heißt „reell-analytisch" in U wenn es zu jedem $x_0 \in U$ eine Umgebung gibt in der die Taylorreihe geg. f konvergiert.

- Ist $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ durch eine Reihe homogener Polynome dargestellt, so ist dies die Taylorreihe von f.

  Bsp.: $$\frac{1}{1-x_1-x_2} = \sum_{k=0}^\infty (x_1+x_2)^k$$ ist Taylorreihe um $(0,0)$

  diese konvergiert für $|x_1+x_2| < 1$ (kein Kreis!)