Satz über lokale Umkehrbarkeit

Def.: Sei $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ offen und $f \in C^k(U,V)$, $k \geq 1$.
f heißt „C^k-Diffeomorphismus" (oder einfach „Diffeom." für $k=1$)
falls f bijektiv und die Umkehrabb. $f^{-1}: V \to U$ diff.bar ist.

Es muss also insbesondere gelten: $f^{-1} \circ f = id_U$, $f \circ f^{-1} = id_V$.

Lemma: Ist $f: U \to V$ ein C^k-Diffeomorphismus, so ist

(i) $(U \subseteq \mathbb{R}^n \wedge V \subseteq \mathbb{R}^m) \Rightarrow n = m$

(ii) $\forall u \in U$: $f'(u)$ ist Isomorphismus & $\det(f'(u)) \neq 0$ im endl.dim.

(iii) $\forall u \in U$: $f^{-1\,\prime}(f(u)) = [f'(u)]^{-1}$

(iv) $f^{-1} \in C^k(V,U)$.

Beweis: Sei $u \in U$ und $v = f(u)$. Nach der Kettenregel gilt:

$$f^{-1\,\prime}(v)\, f'(u) = id_X \quad \text{und} \quad f'(u)\, f^{-1\,\prime}(v) = id_Y$$

also ist $f'(u)$ Isomorphismus & $m = n$. (i), (ii) ✓

außerdem gilt $f^{-1\,\prime}(v) = [f'(f^{-1}(v))]^{-1}$ (*) (iii) ✓

Ist $f^{-1} \in C^l$ und $f \in C^k$ mit $l < k$

dann ist wegen (*) $f^{-1\,\prime} \in C^l$ also $f^{-1} \in C^{l+1}$

und letztendlich $f^{-1} \in C^k$.

□

<u>Frage:</u> Wenn $f \in C^1(U, V = f(U))$ und $\det(f'(u)) \neq 0 \quad \forall u \in U$,

ist f dann ein Diffeomorphismus, also insbesondere injektiv?

<u>Für $n=1$:</u> Ja, da f streng monoton ist.

<u>Für $n \geq 2$:</u> Nein.

<u>Bsp.:</u> „Polarkoordinaten" der Ebene:

$$f: (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ ist surjektiv &

$$f'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$ hat Det. $r \neq 0$.

Aber f ist nicht injektiv, da $f(r,\varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$.

<u>Aber:</u> f läßt sich „lokal" umkehren, z.B. in der Umgebung $(0,\infty) \times (\varphi - \pi, \varphi + \pi)$ eines bel. Punktes (r,φ).

Hier ist f^{-1} auch stetig diff.bar.

<u>Satz:</u> Sei $f \in C^k(U, Y)$, $1 \leq k \leq \infty$, $U \subseteq X$ offen, X, Y Banachräume & $x \in U$. Wenn $f'(x)$ ein Isomorphismus ist, dann gibt es offene Umgebungen $V \subseteq U$ um x und $V' \subseteq Y$ um $f(x)$, so dass die eingeschränkte Abbildung $f|_V : V \to V'$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

D.h. aus $\det(f'(x)) \neq 0$ folgt im endlichdim. „lokale Umkehrbarkeit"

Beweis: Wir wollen erst einmal zeigen, dass für hinreichend kleine $k \in Y$ ein $h \in X$ existiert für das

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + k \qquad \Rightarrow \text{„lokale Umkehrbarkeit"}$$

$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h)$ mit $r(h) = o(\|h\|)$

$f \in C^1$ bei $x \Rightarrow r \in C^1$ bei 0 mit $r'(0) = 0$

$(1) \Leftrightarrow f'(x)h + r(h) = k$

$$\Leftrightarrow \underbrace{h = T(h)}_{\text{Fixpunktgl.}} \text{ mit } T(h) = [f'(x)]^{-1}(k - r(h)) \qquad (2)$$

Fixpunktgl. (hat Lsg. wenn T Kontraktion ist!)

$$(2) \Rightarrow \|T(h_1) - T(h_2)\| \leq \|[f'(x)]^{-1}\| \, \|r(h_2) - r(h_1)\| \qquad (3)$$

Schrankensatz $\Rightarrow \|r(h_2) - r(h_1)\| \leq \|r'\|_K \|h_1 - h_2\|$

wobei: $K := \{t h_1 + (1-t)h_2\}_{t \in [0,1]}$

Da $r'(0) = 0$ & $r \in C^1$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|r'(h)\| \leq \tfrac{1}{2} \|[f'(x)]^{-1}\|^{-1} \quad \text{für } \|h\| \leq \delta$$

also gilt
$$\|r(h_2) - r(h_1)\| \leq \frac{\|h_1 - h_2\|}{2\|[f'(x)]^{-1}\|} \qquad (4)$$

für alle $h_1, h_2 \in B_\delta := \{h \in X \mid \|h\| \leq \delta\}$

$$(3) \Rightarrow \|T(h_1) - T(h_2)\| \leq \tfrac{1}{2}\|h_1 - h_2\| \quad \forall h_1, h_2 \in B_\delta$$

Um den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden zu können müssen wir jetzt noch $T: B_\delta \to B_\delta$ zeigen.

$$(2) \Rightarrow \|T(h)\| \leq \|[f'(x)]^{-1}\| \left(\|k\| + \|r(h)\|\right) \qquad (5)$$

(4) mit $h_1 = h, h_2 = 0 \Rightarrow \|r(h)\| \leq \dfrac{\|h\|}{2\|[f'(x)]^{-1}\|}$ für $h \in B_\delta$

$$(5) \Rightarrow \quad \|T(h)\| \le \|[f'(x)]^{-1}\|\,\|k\| + \tfrac{1}{2}\|h\| \le \delta$$

$$\text{wenn } h \in B_\delta \wedge \|k\| \le \frac{\delta}{2\|[f'(x)]^{-1}\|} =: \eta$$

D.h. wenn $k \in B_\eta$, dann ist $T: B_\delta \to B_\delta$ Kontraktion

Banach'scher FPS $\Rightarrow$ T hat eindeutigen Fixpunkt $h = h(k)$

$h: B_\eta \to B_\delta$

$$(1) \Rightarrow \quad f^{-1}(f(x)+k) = x + h(k) \qquad (9)$$

Bleibt z.z., dass $f^{-1} \in C^1$:

$$(2) \Rightarrow \quad h = [f'(x)]^{-1}(k - r(h)) \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \quad \|h_1 - h_2\| \le \|[f'(x)]^{-1}\| \left(\|k_1 - k_2\| + \|r(h_1) - r(h_2)\|\right)$$

$$\overset{(4)}{\le} \|[f'(x)]^{-1}\|\,\|k_1 - k_2\| + \tfrac{1}{2}\|h_1 - h_2\|$$

$$\Rightarrow \quad \|h(k_1) - h(k_2)\| \le 2\,\|[f'(x)]^{-1}\|\,\|k_1 - k_2\|, \; k_i \in B_\eta \qquad (7)$$

d.h. $h(k)$ ist Lipschitz-stetig auf B_η

$$(6) \Rightarrow \quad h(k) = [f'(x)]^{-1} k + s(k) \qquad (8)$$

$$\text{mit } s: B_\eta \to Y, \; s(k) := -[f'(x)]^{-1} r(h(k))$$

$$(7) \text{ mit } k_1 = k,\, k_2 = 0 \Rightarrow \quad \|h(k)\| \le 2\|k\|\,\|[f'(x)]^{-1}\|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|s(k)\|}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|k\|}\,\frac{\|[f'(x)]^{-1} r(h)\|}{\|h\|} \le 2\,\|[f'(x)]^{-1}\|^2 \underbrace{\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}}_{\to 0 \text{ mit } h \to 0}$$

$$\Rightarrow \quad s(k) = o(\|k\|) \text{ für } k \to 0$$

$$(8) \Rightarrow \quad h'(0) = [f'(x)]^{-1}$$

$(9) \Rightarrow$ f^{-1} diff.bar bei $f(x)$ mit

$f^{-1\prime}(f(x)) = [f'(x)]^{-1}$ stetig, also $f^{-1} \in C^1$ $\square$

Anwendungsbsp.: „<u>getriebenes Pendel</u>"

$$\ddot{\Theta}(t) + \sin \Theta(t) = h(t) \qquad (*)$$

$$X := \{ f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f(t+\tau) = f(t) \}, \quad \tau > 0$$

$$h \in Y := \{ f \in C(\mathbb{R}) \mid \quad \text{-"-} \quad \}$$

X, Y sind Banachräume mit der sup-Norm

$$F : X \to Y, \quad F(\Theta) := \ddot{\Theta} + \sin \Theta$$

Damit ist $(*)$ $F(\Theta) = h$

$F'(0) : X \to Y$ ist $F'(0) f = \ddot{f} + f$

Beweis: $$\frac{\| F(f) - F(0) - F'(0) f \|}{\| f \|} \overset{F(0)=0}{=} \frac{\| \sin f - f \|}{\| f \|} \to 0 \quad ✓$$

$F'(0)$ ist invertierbar wenn $\tau \notin \{2\pi n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ wenn $\|h\|$ hinreichend klein ist, kann F invertiert werden

$\Rightarrow$ $\Theta = F^{-1}(h)$ ist eindeutige τ-periodische Lösung.