Hesse-Matrix & lokale Extrema

Taylorentw. bis 2^{ter} Ordnung für $f \in C^3(U, \mathbb{R})$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$f(x_0+\Delta) = \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0) \Delta^\alpha + R_2(\Delta)$$

$$= \underbrace{f(x_0)}_{|\alpha|=0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0) \Delta_i}_{|\alpha|=1} + \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \partial_i^2 f(x) \Delta_i^2}_{\substack{\alpha=(0\ldots 0,2,0\ldots) \\ |\alpha|=2}} + \underbrace{\sum_{i<j} \partial_i \partial_j f(x_0) \Delta_i \Delta_j}_{\substack{\alpha=(0\ldots 1 \ldots 1 \ldots 0 \\ |\alpha|=2}}}_{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \partial_i\partial_j f(x_0)\Delta_i\Delta_j} \; {}_x R_2^{(\delta)}$$

$$= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), \Delta \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta, H_f(x_0) \Delta \rangle + R_2(\Delta)$$

Def.:
- Für $f \in C^2(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $x_0 \in U$ heißt die $n \times n$ Matrix

$$H := H_f(x_0) := \left(\partial_i \partial_j f(x_0)\right)_{i,j=1\ldots n}$$

„Hesse-Matrix"

- $x_0 \in U$ heißt „stationärer Punkt" wenn $f'(x_0) = 0$

Bemerkung: $f \in C^2$ garantiert $H = H^T$, da $\partial_i \partial_j f(x_0) = \partial_j \partial_i f(x_0)$

Satz: Sei $f: U \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Damit f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum annimmt ist es notwendig, dass $\nabla f(x_0) = 0$.

Beweis: $g(t) := f(x_0 + te_i)$ hat bei $t=0$ ein lokales Extremum.
Also ist $0 = g'(0) = \partial_i f(x_0)$.

$\square$

Erinnerung: Eine sym. Matrix $H \in M_n(\mathbb{R})$ und die zugehörige Quadratische Form $Q(v) := \langle v, Hv \rangle$ heißen

- „positiv definit" $H > 0$ g.d.w. $Q(v) > 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus 0$

  $\Leftrightarrow$ für die Eigenwerte gilt $\lambda_i > 0 \ i = 1..n$

- „positiv semidefinit" $H \geq 0$ g.d.w. $Q(v) \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$

  $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$, $i = 1..n$

- analog definiert sind negativ (semi)definit sowie (semi)-definit = pos. oder neg. (semi)definit

Satz: Sei $x_0 \in U$ stationärer Punkt von $f \in C^3(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann gilt

(1) $H > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in (U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}): f(x) > f(x_0)$

Hesse-Matrix pos. definit $\Rightarrow$ isoliertes lokales Minimum

(2) $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(x_0): f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow H \geq 0$

Lokales Minimum $\Rightarrow$ Hesse-Matrix pos. semidefinit

Beweis: (1) Es gilt $f(x_0 + \Delta) - f(x_0) = \underbrace{\tfrac{1}{2} Q(\Delta) + R_2(\Delta)}_{=: *}$, $\lim_{\Delta \to 0} \frac{R_2(\Delta)}{\|\Delta\|^2} = 0$

z.z.: $(*) > 0$ für $\|\Delta\|$ hinreichend klein (aber $\neq 0$)

es gilt $\frac{Q(\Delta)}{\|\Delta\|^2} = Q\Big(\underbrace{\frac{\Delta}{\|\Delta\|}}_{\in S^{n-1}}\Big)$ und da S^{n-1} kompakt

nimmt Q darauf ein Minimum an. Wegen $H > 0$ gibt es dann ein μ mit $\frac{1}{2}\frac{Q(\Delta)}{\|\Delta\|^2} \geq \mu > 0 \quad \forall \Delta \neq 0$.

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $\frac{|R_2(\Delta)|}{\|\Delta\|^2} < \mu$ für alle Δ für die $\|\Delta\| < \varepsilon$. Dann gilt

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\tfrac{1}{2} Q(\Delta)}_{\geq \mu \|\Delta\|^2 > 0} + R_2(\Delta) > 0 \quad \checkmark$$

(2) Annahme: $f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall x$ mit $\|x - x_0\| < \varepsilon$

Also $\frac{1}{2} Q\left(\frac{\Delta}{\|\Delta\|}\right) + \frac{R_2(\Delta)}{\|\Delta\|^2} \geq 0 \quad \forall \Delta$ mit $\|\Delta\| < \varepsilon$

Da $\lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{R_2(\Delta)}{\|\Delta\|^2} = 0$ muss $Q\left(\frac{\Delta}{\|\Delta\|}\right) \geq 0 \quad \forall \Delta$

und damit $H \geq 0$ $\square$

<u>Bemerkungen:</u>

- Durch Anwendung auf $-f$ gilt ein analoger Zus. auch zw. neg. Definitheit & lokalen Maxima.

- Für $f \in C^2(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $x_0 \in U$ beschreibt

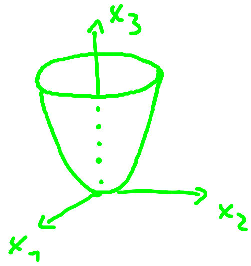
$$x_{n+1} = f(x_0) + \langle x - x_0, \nabla f(x_0)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle x - x_0, H(x - x_0)\rangle$$

eine „<u>Quadrik</u>" im $\mathbb{R}^{n+1}$ falls $H \neq 0$. Dies ist „<u>Schmiegquadrik</u>" an den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$.

- Für $n = 2$ gibt es dafür folgende Äquivalenzklassen unter affinen Koordinatentrafos („Sylvester'sche Normalform")

(i) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2)$ „elliptisches Paraboloid"

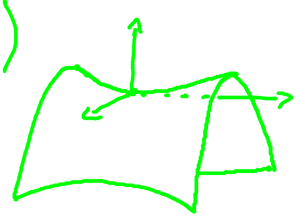
$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$



$H > 0$ oder $H < 0$

(ii) $x_3 = x_1^2 - x_2^2$ „hyperbolisches Paraboloid"

$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$



H indefinit und $\det(H) \neq 0$

$\Leftrightarrow \det(H) < 0$

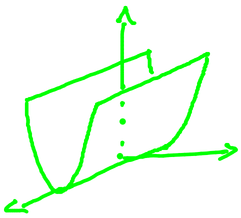
$(0,0) \mathrel{\hat{=}}$ „Sattelpunkt"

(iii) $x_3 = x_1^2$ „parabolischer Zylinder"

$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(H) = 0 \wedge H \neq 0$

also insbesondere $H \geq 0 \vee H \leq 0$



<u>Satz:</u> Eine symmetrische, reelle Matrix $H \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn alle „Hauptabschnittsdeterminanten" positiv sind, d.h. $\forall k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{k1} & \cdots & H_{kk} \end{pmatrix} > 0 \, .$$

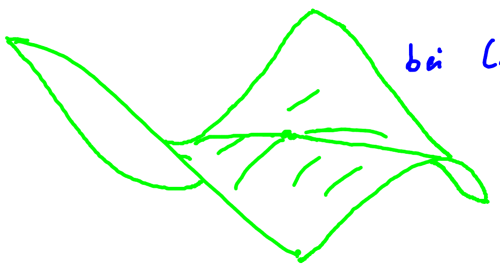
<u>Beweis:</u> $\rightarrow$ lineare Algebra oder Jänich II.

Achtung: $\det(\dots) < 0$ ist <u>nicht</u> das analoge Kriterium für neg. Definitheit

Bsp.: „Affensattel"

$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ → $\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y^2$, $\partial_2 f(x,y) = -6xy$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix}$$



bei $(0,0)$ ist $H=0$, also der Graph „flach"

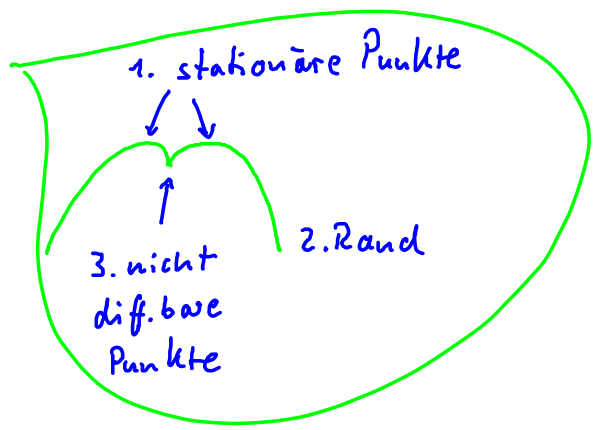
bei $(x,y) \neq (0,0)$ gilt $\det(H) = 36(-x^2-y^2) < 0$

der Graph ist dann „hyperbolisch"

→ keine lokalen Extrema

Kurzanleitung zum Auffinden von Extrema von $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

- potentielle Extrema sind:



- im Inneren gilt:

  wenn $\nabla f(x) = 0$ und $H_f(x)$ existiert, dann ist $H_f(x)$ semidefinit wenn bei: x ein Extremum vorliegt.

  $H > 0$ $(H < 0)$ ⇒ Min. (Max.)

Bemerkung: falls $f \in C^2(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ schreibt man oft $f''(x) = H_f(x)$.

Satz: Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und offen. Dann gilt:

(1) $\forall x \in U: f''(x) \geq 0 \iff f$ konvex auf U

(2) $\forall x \in U: f''(x) > 0 \Rightarrow f$ strikt konvex auf U

Beweis: analog zum Fall $n=1$ ...

Bem.: f konvex ⇒ (lokales Min. ⇒ globales Min.)

f strikt konvex ⇒ höchstens ein Min.

Der Laplace-Operator

Def.: Für $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, definieren wir den „Laplace-Operator" $\Delta : f \mapsto \Delta f \in C(U)$ über

$$\Delta f(x) := tr[H_f(x)] = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(x)$$

Kurz: „$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$"

Bemerkung: Δ taucht im Raumanteil vieler DGL in der Physik auf.

z.B.: ◦ „homogene Potentialgl.": $\Delta \psi = 0$

die Lösungen heißen „harmonische Funktionen"

◦ „Wellengl.": $\Delta \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi$

◦ „Wärmeleitungsgl.": $\Delta \psi = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi$

} auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $c > 0$, $n \leq 3$

Satz: Für bel. ONB $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gilt:

$$\Delta f = \sum_i \partial_{v_i}^2 f$$

Beweis: $\partial_{v_i} \partial_{v_j} f(x) = \langle v_i, H_f(x) v_j \rangle$ und damit

$$\sum_i \partial_{v_i}^2 f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, H_f(x) v_i \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Basisunabh. der Spur}}}{=} tr[H_f(x)] = \Delta f(x)$$

□