Richtungsableitung & partielle Ableitungen

Satz: Sei $f: U \subseteq X \to Y$ (mit U offen) diff.bar bei $x \in U$ mit Ableitung $f'(x)$. Für gegebenes $v \in X$ gilt dann für die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(x+tv)$:

$$\frac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0} = f'(x)v$$

Def.: Dies nennt man „Richtungsableitung" von f am Punkt x in Richtung v und wir schreiben $\partial_v f(x) := \frac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0}$

Beweis: Es gilt $f(x+tv) = f(x) + f'(x)tv + o(\|tv\|)$ und damit

$$f'(x)v = \underbrace{\frac{1}{t}\big(f(x+tv) - f(x)\big)}_{\downarrow \atop \frac{d}{dt} f(x+tv)\big|_{t=0}} + \underbrace{\frac{o(\|tv\|)}{t}}_{\downarrow \atop 0} \quad \forall t \neq 0 \qquad \text{für } \lim_{t\to 0}$$

$\square$

Def.: Ist $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to Y$, $x \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ definiert auf einer offenen Menge U und existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}\Big(f(x_1, \dots, x_i + \Delta, \dots, x_n) - f(x)\Big) =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

so heißt dieser „partielle Ableitung" von f nach der Variablen x_i an der Stelle $(x_1, \dots, x_n)$.

Bemerkung:

- Ist $\{e_i \in \mathbb{R}^n\}_{i=1}^n$ ONB und $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, dann ist $\partial_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ die Richtungsableitung bei x in Richtung e_i.
- Die part. Abl. ist die Ableitung der Funktion $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ für feste $x_j, j \neq i$.

∘ Wenn f diff.bar ist, dann existieren alle Richtungsableitungen.

<u>Bsp.:</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 y^2 + x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 y$$

<u>Korollar:</u> Ist $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ im offenen Gebiet U diff.bar, dann gilt

$$f'(x_0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \cdots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \cdots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix}}_{n} \Big\updownarrow m =: J_f(x_0)$$

<u>Beweis:</u>

$$f'(x_0)x = f'(x_0) \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0)\, x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \partial_i f_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_i f_m(x_0) \end{pmatrix} x_i = J_f(x_0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

□

<u>Bemerkung:</u> Die Kettenregel führt auf das Produkt der Jacobimatrizen d.h. $J_{f\circ g}(x) = J_f(g(x))\, J_g(x)$.

In der Physik schreibt man dafür oft

$$\text{„} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \text{“}$$

Wichtiger Spezialfall: $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x(t)\big)\, \dot{x}_i(t)$$

Der Gradient

Def.: Für $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist der „Gradient" am Punkt x definiert durch

$$\nabla f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung:

- Es gilt $$J_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(x)^T \end{pmatrix}$$

- Richtungsableitungen lassen sich damit schreiben als $\partial_v f(x) = J_f(x) v = \langle \nabla f(x), v \rangle$ und mit $\|\cdot\| := \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ gilt $\|\nabla f(x)\| = \max\{ \partial_v f(x) \mid \|v\| = 1 \}$

- Der Gradient zeigt in Richtung des „steilsten Anstiegs"

- typ. Bsp. aus der Physik: Newton'sche Bwgl. in „konservativem" Kraftfeld: $m \ddot{x} = -\nabla \phi(x)$ mit „Potential" $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

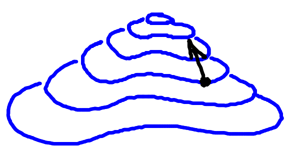
Satz: Sei $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff.bar und $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to U$ diff.bar und so dass $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall t \in I: f(\gamma(t)) = c$, dann gilt:

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$$

Bemerkung: D.h. der Gradient ist orthogonal zu Niveaulinien.

Beweis: Anwendung der Kettenregel auf $f \circ \gamma: t \mapsto c$

D.h. $$0 = (f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\, \gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)$$



□