Parameterabh. Integrale

Satz: Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a<b$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: [a,b] \times U \to \mathbb{R}^m$ stetig.
Definiere $g(x) := \int_a^b f(t,x)\, dt$. Dann gilt

(1) g ist stetig auf U.

(2) Existiert $(t,x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} f(t,x)$ und ist stetig auf $[a,b] \times U$, dann ist auch g auf U stetig partiell nach x_i diff.bar und

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t,x)\, dt.$$

Bemerkung: (2) bedeutet, dass Integration & Differentiation vertauschen.

Beweis: (1) Sei $\varepsilon > 0$, $x_0 \in U$. Aus Stetigkeit von f folgt

$$\forall t_0 \in [a,b] \; \exists \delta_0, \delta_0' > 0 :$$

$$\left. \begin{array}{l} \|x - x_0\| < \delta_0' \quad \wedge \\ t \in U_{\delta_0}(t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \| f(t,x) - f(t_0, x_0) \| < \varepsilon$$

Überdecke $[a,b]$ mit endlich vielen $U_{\delta_i}(t_i)$ und setze $\delta' := \min\{\delta_i'\}$. Dann gilt $\forall t \in [a,b]$:

$$\|x - x_0\| < \delta' \Rightarrow \|f(t,x) - f(t,x_0)\| < \varepsilon$$

Also ist $\|g(x) - g(x_0)\| \leq \int_a^b \|f(t,x) - f(t,x_0)\|\, dt$

$$\leq \varepsilon (b-a)$$

$\square$

$$(2) \qquad \frac{1}{\eta}\Big(g(x+\eta e_i) - g(x)\Big) = \int_a^b \frac{f(t, x+\eta e_i) - f(t,x)}{\eta}\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x+\xi e_i)\, dt \qquad (*)$$

Existenz von $\xi \in [0,\eta]$ garantiert durch Mittelwertsatz.

Wegen (1) (mit $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ anstatt f) gilt dann

$(*) \to \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t,x)\, dt$ für $\eta \to 0$.

$\boxed{2}$

<u>Korollar</u> (Satz von Fubini): Ist $h: [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann gilt

$$\int_c^d \left(\int_a^b h(x,t)\, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d h(x,t)\, dx \right) dt$$

<u>Beweis</u>: $H_1(\xi) := \int_c^\xi \left(\int_a^b h(x,t)\, dt \right) dx$, $H_2(\xi) := \int_a^b \left(\int_c^\xi h(x,t)\, dx \right) dt$

mit $\xi \in [c,d]$. Beide Integranden sind stetig.

Nach HDI gilt $H_1'(\xi) = \int_a^b h(\xi,t)\, dt$ und wegen Vertauschbarkeit von $\frac{\partial}{\partial \xi}$ mit $\int$ auch $H_2'(\xi) = \int_a^b h(\xi,t)\, dt$.

Also $H_1' = H_2'$ und wegen $H_1(c) = H_2(c) = 0$ auch $H_1 = H_2$.

$\square$

<u>Bemerkung</u>: Dies lässt sich einfach auf iterierte Integration über Quader $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ verallgemeinern.

Bsp. für parameterabh. Integral: Besselfunktion

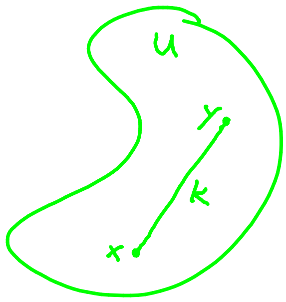
$$J_n(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin t)\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

J_n ist Lösung der „Bessel-Differentialgl."

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

beschreibt z.B. Eigenschwingungen bei Zylindersymmetrie (Musikinstrumente, Wasserwellen in Regentonne, etc.)

Der Schrankensatz



Satz: Sei $f \in C^1(U,Y)$, $U \subseteq X$ offen und mit $x,y \in U$ auch $K := \{tx + (1-t)y\}_{t\in[0,1]} \subseteq U$. Dann gilt

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|f'\|_K \, \|y-x\|$$

wobei: $\|f'\|_K := \sup\limits_{z\in K} \|f'(z)\| = \sup\limits_{z\in K} \sup\limits_{h\in X} \frac{\|f'(z)h\|}{\|h\|}$

Beweis: $\Delta := y - x$

$$\|f(x+\Delta) - f(x)\| = \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+t\Delta)\,dt \right\|$$

$$= \left\| \int_0^1 f'(x+t\Delta)\Delta\,dt \right\|$$

$$\leq \int_0^1 \|f'(x+t\Delta)\Delta\|\,dt$$

$$\leq \int_0^1 \|f'\|_K \|\Delta\|\,dt = \|f'\|_K \|\Delta\|$$

$\square$

D.h., C^1-Abbildungen sind Lipschitz-stetig auf kompakten, konvexen Mengen.