II. Fixpunktsätze

Existenz von Lösungen wird oft gezeigt indem man das Problem auf ein Fixpunktproblem „$f(x)=x$" reduziert...

Zwischenwertsatz: Sei $(X,\mathcal{O})$ ein zusammenhängender top. Raum, $f: X \to \mathbb{R}$ stetig und $a,b \in X$. Dann gilt

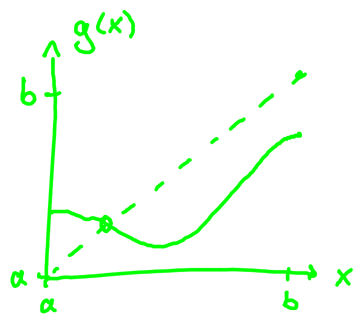
$$\forall y \in [f(a), f(b)] \; \exists x \in X: \quad f(x) = y.$$

Beweis: angenommen $y \notin f(X)$, dann wäre $f(X)$ nicht zusammenhängend. Da f stetig ist, muß $f(X)$ jedoch zusammenh. $\square$

Korollar: Jede stetige Funktion $g: [a,b] \to [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ hat einen „Fixpunkt", d.h. $\exists x \in [a,b]: \; g(x) = x$.

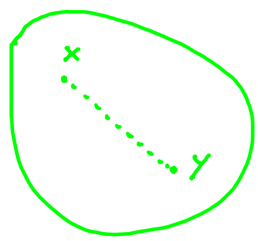
Beweis: Definiere $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := g(x) - x$.
Dann ist $f(a) \geq 0$ und $f(b) \leq 0$. Da f stetig, $\exists x: f(x) = 0$ $\square$

Bem.: Hier führt eine stetige Abb. eines kompakten Intervalls in sich selbst zu einem F.P.
Die Verallgemeinerung ist der...

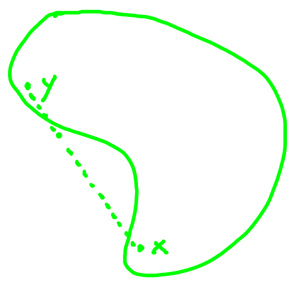


Fixpunktsatz von Brouwer

Def.: Eine Teilmenge $S \subseteq V$ eines $\mathbb{R}$-Vektorraums heißt „konvex", wenn $x, y \in S \wedge \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S$.



konvex



nicht konvex

Satz (Brouwer):

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n, K \neq \emptyset$ eine kompakte, konvexe Teilmenge und $f: K \to K$ stetig, dann gilt $\exists x \in K: \ f(x) = x$.

Beweis: nicht ganz einfach, deshalb später ... $\square$

Korollar: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph zum Einheitsball $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, und $g: A \to A$ stetig, dann $\exists y \in A: g(y) = y$.

Beweis: Ist $h: A \to B$ ein Homöomorphismus, dann ist $f: B \to B$, $f: h \circ g \circ h^{-1}$ stetig und es gilt

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad g(y) = y \ \text{ mit } y = h^{-1}(x) \qquad \square$$

Anwendungen: Existenz von Lösungen nicht-lin. Gleichungssys.

z.B. — " — Nash-Gleichgewichten

Korollar (Satz von Perron-Frobenius): Sei M eine $n \times n$-Matrix mit $M_{ij} > 0 \ \forall i,j$. Dann gibt es $\lambda \in (0, \infty)$ und $v \in [0, \infty)^n$, so dass $Mv = \lambda v$, $v \neq 0$.

Beweis: $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ und $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1 \wedge \forall i: x_i \geq 0\}$

Dann ist $f: \Delta \to \Delta$, $f(x) := \frac{Mx}{\|Mx\|_1}$ stetig (da $Mx \neq 0$)

und somit existiert ein $v \in \Delta$, so dass $f(v) = v$,

also $Mv = \lambda v$ für $\lambda = \|Mv\|_1$.

$\square$

Banachscher Fixpunktsatz

Def.: Eine Abbildung $f: X \to Y$ zw. zwei metrischen Räumen heißt „Kontraktion" wenn sie Lipschitz stetig ist mit Konstante $L < 1$. D.h. wenn

$$\exists L<1 \ \forall x, x' \in X \quad d_Y(f(x), f(x')) \leq L \, d_X(x, x').$$

Bem.:
- $\forall x, x' \in X \ d_Y(f(x), f(x')) < d_X(x, x')$ ist schwächer !
- „Kontraktion" ist in der Lit. nicht einheitl. definiert.

Satz: Sei $X \neq \emptyset$, (X, d) ein vollst. metrischer Raum und $f: X \to X$ eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante $L < 1$.

1. f hat genau einen Fixpunkt $x = f(x)$.
2. Für jede Folge (x_n), $x_0 \in X$, $\underbrace{x_{n+1} := f(x_n)}_{\text{„Picard-Iteration"}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: d(x_n, x) \underset{b}{\leq} \frac{L}{1-L} d(x_n, x_{n-1}) \underset{a}{\leq} \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0).$$

Beweis: Es gilt $\forall n, k \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n))$$
$$\leq L \, d(x_{n-1}, x_n) \leq L^n d(x_0, x_1) \to a \checkmark$$

und außerdem

$$d(x_n,x_{n+k}) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j},x_{n+j+1})$$

$$\overset{(a)}{\leq} \sum_{j=0}^{k-1} L^{j+1}\, d(x_{n-1},x_n) \overset{\text{geom. Reihe}}{\leq} \frac{L}{1-L}\, d(x_{n-1},x_n)$$

$$\overset{(a)}{\leq} \frac{L^n}{1-L}\, d(x_0,x_1)$$

Da $L<1$, ist (x_n) damit Cauchy-Folge und konvergiert $x_n \to x$ (wegen Vollst. von X).

Da f stetig ist, gilt $f(x) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$$= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x. \quad \to f(x)=x \checkmark$$

Angenommen $f(x')=x'$, dann ist

$$d(x,x') = d(f(x'),f(x)) \leq L\, d(x',x) < d(x',x)$$

also $d(x',x)=0$ und somit $x=x'$ $\to$ Eindeutigkeit ✓

(b) folgt aus $d(x_n,x_{n+k}) \leq \frac{L}{1-L}\, d(x_{n-1},x_n)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}$ $\square$

Gegenbsp.e: ∘ $X=(0,1)$, $f: x \mapsto \frac{x}{2}$ hat keinen F.p.

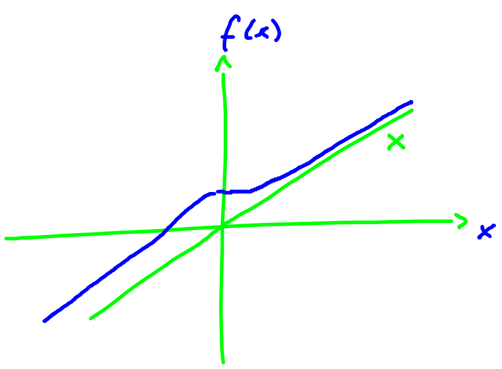
X nicht vollst.

∘ $X=\mathbb{R}$, $f: x \mapsto \frac{\pi}{2} + x - \arctan x$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Mittelwertsatz $\Rightarrow |f(x)-f(y)| < |x-y|$

aber es gibt aber kein $L<1$



f hat keinen Fixpunkt!