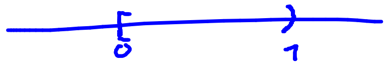
Abschluß & Dichtheit



$A = [0,1) \subseteq \mathbb{R}$

Inneres	$(0,1)$
Äußeres	$(-\infty,0) \cup (1,\infty)$
Rand	$\{0\} \cup \{1\}$
Abschluß	$[0,1]$

Def.: Sei: $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum und $A \subseteq X$.

- $A^\circ := \{x \in X \mid A \text{ ist Umgebung von } x\}$ heißt das „Innere" von A,
- $(X \setminus A)^\circ$ heißt das „Äußere" bzgl. A
- $\partial A := \{x \in X \mid x \in \Omega \in \mathcal{O} \Rightarrow \Omega \cap A \neq \emptyset \wedge \Omega \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$
  heißt „Rand" von A.
- $\bar{A} := A \cup \partial A$ heißt „Abschluß" von A.
- A heißt „dicht" in X, wenn $\bar{A} = X$.

Bemerkungen:

- A abg. $\Leftrightarrow$ $\partial A \subseteq A$ bzw.
  A offen $\Leftrightarrow$ $\partial A \subseteq X \setminus A$
  Beweis: '$\Rightarrow$': $A \in \mathcal{O} \Rightarrow A^\circ = A \Rightarrow \partial A \subseteq X \setminus A$.
  '$\Leftarrow$': $\partial A \subseteq X \setminus A \Rightarrow (x \in A \Rightarrow \exists \Omega \in \mathcal{O}: x \in \Omega \subseteq A)$ $\square$

- $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$
  Beweis: $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \partial \mathbb{Q})$ da $x \in \Omega \in \mathcal{O} \Rightarrow \Omega \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ $\square$

- Wenn $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}^n$ offen bzgl. der Zariski Topologie ist, so ist A dicht in $\mathbb{C}^n$ bzgl. der durch eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ gegebenen Topologie. Beweis: ... später ...

Satz: Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt
$$x \in \bar{A} \iff \text{es gibt eine Folge } x_n \to x \text{ mit } x_n \in A$$

Beweis: "$\Rightarrow$": $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$ für alle $n \in \mathbb{N}$

und damit $x_n \to x$

"$\Leftarrow$": jede Umgebung $\Omega \ni x$ muß (da $x_n \to x$) fast alle $x_n \in A$ enthalten. Somit ist $x \in A \cup \partial A$. $\square$

zusammenhängend

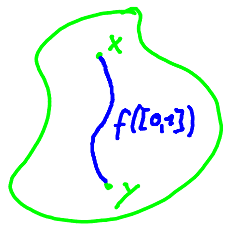
Zusammenhang

nicht zusamh.

Def.: ∘ Ein top. Raum X heißt „<u>zusammenhängend</u>", wenn er keine Vereinigung zweier disjunkter, nicht-leerer, offener Mengen ist.

∘ Eine Teilmenge $X_0 \subseteq X$ heißt „zusam." wenn sie es als Teilraum ist.

∘ X heißt „<u>wegzusammenhängend</u>", wenn $\forall x,y \in X$ eine stetige Funktion $f : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \to X$ existiert, so dass
$$f(0) = x \;\wedge\; f(1) = y.$$



Satz: ∘ X wegzusammenh. $\Rightarrow$ X zusammenh.

∘ Die Umkehrung gilt für jedes offene X eines normierten Vektorraums.

Beweis: → z.B. Königsberger

Satz: Ist $f : X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis: angenommen $f(X) = A \cup B$ mit $A, B \in \mathcal{O}_Y|_{f(X)}$, $A \cap B = \emptyset$, dann wäre $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ ↯ $\square$

Kompaktheit

Def.: • Ein top. Raum $(X,\mathcal{O})$ heißt „kompakt", wenn jede „offene Überdeckung" von X eine endl. „Teilüberdeckung" hat, d.h. zu jeder Familie $\{U_\lambda \in \mathcal{O}\}_{\lambda\in\Lambda}$ mit $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X$ gibt es endlich viele $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ mit $U_{\lambda_1}\cup\dots\cup U_{\lambda_N} = X$.

• Eine Teilmenge $X_0 \subseteq X$ heißt kompakt, wenn $(X_0, \mathcal{O}|_{X_0})$ kompakt ist.

Bemerkung: • Kompaktheit ermöglicht einem oft ...

- Sätze/Beweise über „endliche" Objekte hinaus zu verallgemeinern. z.B. hat $f: X \to \mathbb{R}$ ein Max., wenn X endlich ist, aber auch, wenn X kompakt & f stetig ist.

- von „lokalen" auf „globale" Eigenschaften zu schließen (in folgendem Beweis überträgt sich z.B. „Beschränktheit" von lokalen Umgebungen auf den gesamten Raum.)

Satz: $X_0 \subseteq X$ kompakt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $\{U_\lambda \in \mathcal{O}_X\}_{\lambda\in\Lambda}$ mit $X_0 \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ gibt es endlich viele $\lambda_1,\dots,\lambda_N$, so dass $X_0 \subseteq U_{\lambda_1}\cup\dots\cup U_{\lambda_N}$.

Beweis: "$\Rightarrow$": wegen Kompaktheit gibt es $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ mit

$$X_0 = \bigcup_{i\leq N} (U_{\lambda_i}\cap X_0) \quad \text{also} \quad X_0 \subseteq \bigcup_{i\leq N} U_{\lambda_i}.$$

"$\Leftarrow$": folgt aus $V_\lambda \in \mathcal{O}_{X_0} \Rightarrow V_\lambda = U_\lambda \cap X_0$ mit $U_\lambda \in \mathcal{O}$

$\square$

Der topol. Kompaktheitsbegriff ist konsistent mit dem aus dem 1. Sem:

Satz: Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raums. Dann ist äquiv.:

(i) A ist kompakt (wie eben definiert)

$\Updownarrow$

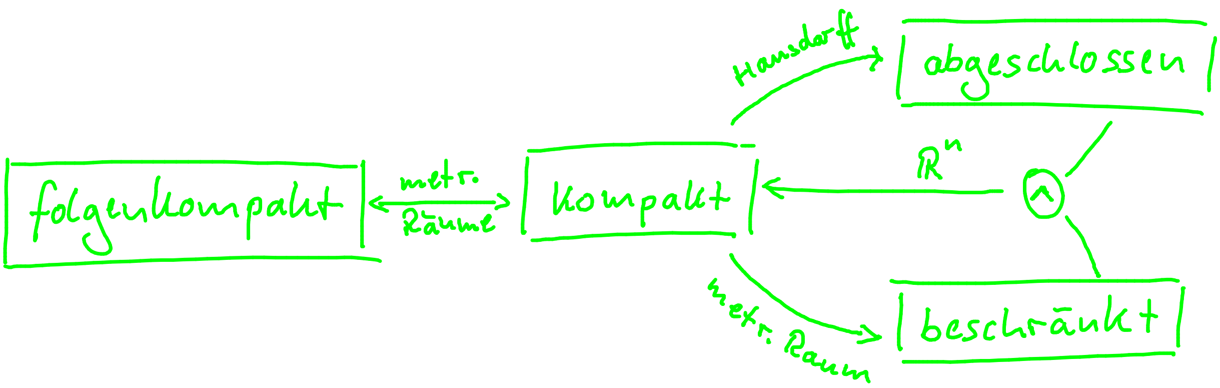
(ii) jede Folge in A besitzt eine in A konvergente Teilfolge (= „Folgenkompaktheit")

Damit gilt dann auch der...

Satz von Heine-Borel:

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \iff A \text{ beschränkt \& abgeschlossen}$$

Beweis: $\leadsto$ 1. Sem.



Satz: Jede kompakte Teilmenge X eines metrischen Raums ist beschränkt, d.h. $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x,y \in X: d(x,y) < c$.

Beweis: $X \subseteq \bigcup_{x \in X} U_\varepsilon(x)$ ist offene Überdeckung für $\varepsilon > 0$.

Wegen Kompaktheit $\exists x_1, \dots, x_N$, so dass

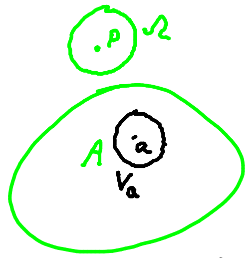
$X \subseteq \bigcup_{i \leq N} U_\varepsilon(x_i)$ und damit $x,y \in X \Rightarrow d(x,y) \leq 2N\varepsilon$

$\square$

Satz: Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff Raums ist abgeschlossen.

Beweis: Sei $A \subseteq X$ kompakt & X hausdorffsch.

z.z.: $X \setminus A$ offen,



d.h. $\forall p \in X \setminus A \; \exists \Omega \in \mathcal{O}: \; p \in \Omega \wedge \Omega \cap A = \emptyset$

Zu jedem $a \in A$ gibt es Umgebungen U_a von p und V_a von a, so daß $U_a \cap V_a = \emptyset$ (Hausdorff Eigenschaft)

A kompakt $\Rightarrow$ $A \subseteq V_{a_1} \cup \ldots \cup V_{a_N}$ für geeignete $\{a_i \in A\}_{i=1}^N$

Für $\Omega := U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_N} \in \mathcal{O}$ gilt daher $p \in \Omega$ und

$$\Omega \cap A \subseteq (\bigcap_i U_{a_i}) \cap (\bigcup_i V_{a_i}) = \emptyset$$

$\square$

Satz: Ist X kompakt und $f: X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ kompakt.

Beweis: Sei $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offene Überdeckung von $f(X)$. Dann ist $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ offene Überd. von X und es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, s.d. $f^{-1}(U_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{\lambda_N}) = X$ und somit $f(X) \subseteq U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_N}$ $\square$

Bemerkung: ◦ Dies beweist, dass $[0,1)$ und S^1 nicht homeomorph sind, da S_1 kompakt ist, aber $[0,1)$ nicht.

Korollar: Jede stetige Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Raum, nimmt ein Max. und ein Min. an.

Beweis: X kompakt $\wedge$ f stetig $\Rightarrow$ $f(X)$ kompakt in $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ metrischer Raum $\Rightarrow$ $f(X)$ beschränkt & abgeschl.

d.h. sup & inf existieren und werden angenommen.

$\square$

Lemma: Ist A ein abgeschlossener Teilraum eines kompakten top. Raumes $(X, \mathcal{O})$, dann ist auch A kompakt.

Beweis: Sei $\{U_\lambda \in \mathcal{O}\}_{\lambda \in \Lambda}$ offene Überdeckung von A. Da $X \setminus A$ offen ist, ist $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ zusammen mit $X \setminus A$ offene Üb. von X. Da X kompakt, gibt es λ_i, s.d. $U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_N} \cup (X \setminus A) = X$ und damit $A \subseteq U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_N}$. $\square$

Satz: Jede stetige Bijektion $f: X \to Y$ von einem kompakten Raum auf einen Hausdorff-Raum ist ein Homöomorphismus.

Beweis: z.z.: $f^{-1}: Y \to X$ stetig, d.h.

$$A \subseteq X \text{ abgeschlossen} \Rightarrow (f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \text{ abg.} \quad (*)$$

Da X kompakt, ist nach dem Lemma, auch A und damit $f(A)$ kompakt. Da Y hausdorff'sch, ist also $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen, was $(*)$ beweist. $\square$