PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

WS 11/12
Blatt 6
(25. November 2011)

Analysis 1

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Konvergenz 1
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-4)(n^2+1)}{7n(2n^2+10000)}, \qquad d)\quad \lim_{n\to\infty} \left[n\left(1-\sqrt{1-\frac{a}{n}}\right)\right],$$

$$b)\quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \qquad e)\quad \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n,$$

$$c)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{8n+2}{4n+17}, \qquad f)\quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n).$$

Aufgabe 2. Konvergenz 2
Verifizieren Sie die folgenden Grenzwerte:

$$a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0 \qquad \forall s \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty),$$

$$b)\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1) = 0,$$

$$c)\quad \lim_{n\to\infty} n^k x^n = 0 \qquad \forall x \in (0,1), k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3. Konvergenz 3
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})^2}, \qquad c)\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k},$$

$$b)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k+i^k}{(3i)^k-2^k}, \qquad d)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}.$$

Aufgabe 4. Konvergenz 4
Es sei $\sum_k a_k$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern. Man untersuche die Reihen

$$a)\quad \sum_k (-1)^k a_k, \qquad c)\quad \sum_k (e^{a_k}-1),$$

$$b)\quad \sum_k \frac{1}{\log a_k}, \qquad d)\quad \sum_k k a_k^2$$

auf Konvergenz; das heisst, man gebe in jedem Fall einen Konvergenzbeweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 5. Konvergenz 5
Es bezeichne β_n die Anzahl der Ziffern in der Binärdarstellung von n. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n$.

Aufgabe 6. Konvergenz 6

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ gegebene nichtnegative Zahlen. Bestimme den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_1^k + \alpha_2^k + ... + \alpha_p^k) t^{2k}.$$