TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

Analysis 1

WS 11/12
Blatt 8
(9. Dezember 2011)

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Freitag vor zwei Wochen
Fritz vergeht sich an einer vollen Literflasche Whisky seines Vaters folgendermassen: Er trinkt immer wieder einen minimalen Bruchteil λ des Inhalts und füllt mit Wasser nach, bis schliesslich die Whiskykonzentration in der Flasche auf $\leq \frac{1}{2}$ gesunken ist. Wieviel Liter Whisky und wieviel Liter Wasser hat Fritz dabei im Ganzen getrunken? Berechen Sie die Grenzwerte für $\lambda \to 0$.

Aufgabe 2. Grenzwerte
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte falls vorhanden:

$$a) \quad \lim_{x\to-3} \frac{x^3+27}{x^4-81} \qquad\qquad b) \quad \lim_{x\to\infty} \sin \frac{2x-1}{(\sqrt{x}+1)^3}$$

$$c) \quad \lim_{x\to\infty} \sin\sqrt{x} \qquad\qquad d) \quad \lim_{x\to1} \frac{x^p-1}{x^q-1}\ (p,q\in\mathbb{N})$$

$$e) \quad \lim_{x\to2+} \frac{x^2-14x+24}{|x-2|+|x^2-4|} \qquad\qquad f) \quad \lim_{x\to2-} \frac{x^2-14x+24}{|x-2|+|x^2-4|}$$

$$g) \quad \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x(x+a)}-x\right).$$

Aufgabe 3. Konvergenz
Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent?

$$a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{x}{k} \qquad\qquad b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{x}{k}\right)$$

$$c) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\tan\frac{x}{k} \qquad\qquad d) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k \text{ (Quontientenkriterium)}$$

Aufgabe 4. Konvergenzradien
Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$a) \quad \sum_{k=0}^{\infty}(1-\tanh k)z^k, \qquad b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\left(1+\frac{3}{k}\right)^{k^2} z^k.$$

Aufgabe 5. Stetigkeit
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig in $x_0\in\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f in einer Umgebung von x_0 beschränkt ist.

Aufgabe 6. Satz 6 und Satz 7 aus Vorlesung
a) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei X kompakt und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Beweisen Sie, dass $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist.
b) Seien (X, d) ein metrischer Raum und $K \subseteq X$ kompakt und nicht leer und sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $\exists x_0, x_1 \in K$, sodass

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \qquad \forall x \in K.$$