TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
D. Lercher
O. Szehr

Höhere Mathematik II für Physiker

Analysis 1

WS 11/12
Blatt 7
(2. Dezember 2011)

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Potenzreihen und Abel

(a) In der Zentralübung wurde das Konvergenzkriterium für Reihen von Abel gezeigt. Leiten Sie daraus das folgende Korollar ab: Sei (a_n) eine monotone Nullfolge mit $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$, so dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

den Konvergenzradius $R = 1$ besitzt. Dann konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in S^1 \setminus \{1\}$.

(b) Bestimmen Sie für $s \in \mathbb{Q}$ den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen. Untersuchen Sie anschließend das Konvergenzverhalten für $|z| = R$.

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} \qquad\qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$$

Hinweis: Verwenden Sie für b) die asymptotische Gleichheit $p_n \simeq \sqrt{\pi n}$, wobei p_n das *Wallissche Produkt* bezeichnet

$$p_n := \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1}\,.$$

Aufgabe 2. Potenzreihen und Fibonacci
Es bezeichne f_n die Folge der Fibonacci-Zahlen (siehe Blatt 4, Aufgabe 3) und

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe f und zeigen Sie mit der Rekursionsrelation der Fibonaccizahlen, dass sie für $|z| < R$ durch die Relation

$$(1 - z - z^2) f(z) = 1$$

gegeben ist.

(b) Verifizieren Sie diese Beziehung mit der in Blatt 4 gegebenen expliziten Formel für f_n.

Aufgabe 3. exp auf dem Einheitskreis
Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichne $L_n(x)$ die Länge des Streckenzuges durch die Punkte $\exp(i\frac{k}{n}x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene. Zeigen Sie

$$(a)\ L_n(x) = 2n \left|\sin \frac{x}{2n}\right|\,, \qquad\qquad (b)\ \lim_{n\to\infty} L_n(x) = |x|\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass für jede Nullfolge (a_n) mit $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ die asymptotische Gleichheit $\sin(a_n) \simeq a_n$ besteht.

Aufgabe 4. sin und cos
Berechnen Sie für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ die Summen $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ und $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. Drücken Sie Ihre Ergebnisse unter Verwendung der Funktionen sin und cos aus.

Aufgabe 5. Stetige Fortsetzung
Für $s \in \mathbb{Q}$ definieren wir die Funktion

$$f_s : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f_s(z) := \frac{\overline{z}}{|z|^s}.$$

(a) Für welche $s \in \mathbb{Q}$ besitzt f_s eine stetige Fortsetzung im Nullpunkt, d.h. für welche $s \in \mathbb{Q}$ existiert eine stetige Funktion $F_s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $F_s(z) = f_s(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

(b) Zeigen Sie, dass, falls solch eine stetige Fortsetzung F_s existiert, $F_s(0)$ (und damit F_s) eindeutig durch f_s bestimmt ist.

Aufgabe 6. Stetigkeit
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

stetig ist und die Periode 1 besitzt, d.h. $f(z+1) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Aufgabe 7. Abgeschlossene und kompakte Mengen
Orientieren Sie sich in dieser Aufgabe an den Unterlagen zur Zentralübung vom 2. Dezember. Zeigen sie die zwei folgenden Lemmata:

1. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und I eine beliebige Indexmenge. Dann gelten
   (i) $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow \cup_{i=1}^{n} A_i$ abgeschlossen,
   (ii) A_i abgeschlossen $\forall i \in I \Rightarrow \cap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.
2. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann gelten
   (i) $K \subseteq X$ kompakt, $f : X \to Y$ stetig $\Rightarrow f(K)$ kompakt,
   (ii) $K \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow K$ abgeschlossen,
   (iii) $K \subseteq X$ kompakt, $A \subseteq K$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ kompakt.

Eine mögliche Abgabe und die Nachbesprechung erfolgen in den Tutorübungen in der Woche vom 12. bis zum 16. Dezember.
Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind zum Vorlösen an der Tafel geeignet.
