PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

WS 11/12
Blatt 5
(18. November 2011)

Analysis 1

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Geraden und Kreise in $\mathbb{C}$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichungsschar

$$a|z|^2 + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, \qquad a, c \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C},\ ac < |b|^2$$

genau alle Geraden und Kreise in der komplexen Ebene beschreibt.

(b) Folgern Sie daraus, dass die Inversion $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ Geraden *und* Kreise auf Geraden *oder* Kreise abbildet.

Aufgabe 2. Möbiustransformationen
Wir betrachten die Möbiustransformationen

$$\phi_A : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2},\ ad - bc = 1\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass zu allen Matrizen A und B eine Matrix C existiert, so dass

$$\phi_A(\phi_B(z)) = \phi_C(z)\ \forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\,.$$

Drücken Sie C durch A und B aus.

(b) Beweisen Sie, dass zu beliebigen, voneinander verschiedenen, komplexen Zahlen z_0, z_1 und z_2 genau eine Möbiustransformation ϕ_{z_0,z_1,z_2} mit

$$\phi_{z_0,z_1,z_2}(z_0) = 0,\ \phi_{z_0,z_1,z_2}(z_1) = 1 \text{ und } \phi_{z_0,z_1,z_2}(z_2) = \infty$$

existiert.

(c) Beweisen Sie, dass für alle Möbiustransformationen ϕ

$$\mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \mathrm{DV}(\phi(z_0), \phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3))$$

ist, wobei

$$\mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_0)}{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}$$

das sogenannte Doppelverhältnis bezeichnet und höchstens zwei der Zahlen z_i, $0 \le i \le 3$, gleich sind.

Aufgabe 3. Konvergente Teilfolgen

(a) Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen und es seien die drei Teilfolgen (a_{2n}), (a_{2n+1}) und (a_{5n}) konvergent. Zeigen Sie, dass (a_n) dann konvergiert.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist die Teilfolge (a_{pn}) für jede Primzahl p konvergent, so konvergiert auch die Folge (a_n).

Aufgabe 4. Metrische Räume und Folgen

(a) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl p die p-adische Metrik

$$\begin{aligned} d_p(m,n) &:= \min\{p^{-k} | p^k \text{ teilt } (m-n),\ k \in \mathbb{N}_0\},\ m,n \in \mathbb{Z},\ m \neq n\,, \\ d_p(m,m) &:= 0,\ m \in \mathbb{Z}\,, \end{aligned}$$

tatsächlich eine Metrik auf den ganzen Zahlen definiert.

(b) In einem metrischen Raum (M,d) seien eine Folge (a_n) und ein Punkt a so gegeben, dass jede Teilfolge von (a_n) eine gegen a konvergierende Teilfolge besitzt. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) gegen a konvergiert.

Aufgabe 5. Arithmetisches Mittel von Folgen

(a) Sei (a_n) eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit Grenzwert a. Beweisen Sie, dass dann das arithmetische Mittel

$$s_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

der Folge (a_n) auch gegen a konvergiert.

(b) Finden Sie ein Beispiel einer divergenten komplexen Folge, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

Aufgabe 6. Riemann Zeta Funktion

Sei (p_k) die Folge der Primzahlen und J_N die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primfaktorzerlegung ausschließlich die Faktoren $\{p_i | 1 \leq i \leq N\}$ enthält. Zeigen Sie für beliebige $N \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{Q} \cap (1,\infty)$ die Gleichheit

$$\sum_{n \in J_N} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \tag{1}$$

und folgern Sie daraus die Euler'sche Produktformel

$$\zeta(s) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-p_k^{-s}} =: \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$$

wobei ζ die in der Vorlesung definierte Riemann Zeta Funktion ist. Wenn wir später im Semester über den natürliche Logarithmus und seine Reihenentwicklung verfügen, können wir die Gleichung (1) verwenden um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ divergent ist.

Eine mögliche Abgabe und die Nachbesprechung erfolgen in den Tutorübungen in der Woche vom 28. November bis zum 02. Dezember.
Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind zum Vorlösen (oder zum Erklären) an der Tafel geeignet. Zeit in den Tutorübungen ist knapp: Überlegen Sie sich bei längeren Aufgaben vorher gut, wie Sie Ihre Erklärung strukturieren und welche wichtigen Schritte Sie hervorheben möchten.
