PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

WS 11/12
Blatt 2
(4. November 2011)

Analysis 1

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Abbildungen
Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf

1. $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
2. Eine Kreislinie.

Aufgabe 2. Positive Zahlen
Beweisen Sie: Die drei reellen Zahlen a, b, c sind genau dann alle positiv, wenn die folgenden Ungleichungen simultan erfüllt sind:

$$a + b + c > 0 \qquad ab + bc + ca > 0 \qquad abc > 0.$$

Aufgabe 3. Infima, Suprema
Bestimmen Sie Infimum und Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$. Welche dieser Mengen besitzen ein minimales oder maximales Element?

1. $\left\{\dfrac{|x|}{|x|+1} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$
2. $\left\{\dfrac{x}{x+1} \mid x > -1\right\}$
3. $\left\{x + \dfrac{1}{x} \mid 0.5 < x < 2\right\}$
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x+1)^2 + 5y^2 < 4\right\}$

Aufgabe 4. Algebraische Zahlen
Eine Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heisst *algebraisch*, wenn sie Lösung der Gleichung

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0 = 0, \qquad a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$$

ist. Zeigen Sie: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar unendlich.

Aufgabe 5. Irrationalität...
Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrational ist.

Aufgabe 6. Parallelogrammidentität
Beweisen Sie die Parallelogrammidentität:

$$u, v \in \mathbb{C} \Rightarrow |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$