TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
**Zentrum Mathematik**

PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

**Höhere Mathematik II für Physiker**

# Analysis 1

**WS 11/12**
**Blatt 2**
**(28. Oktober 2011)**

***Hausaufgaben***

---

**Aufgabe 1. Mengen**
Gegeben eine Funktion $f\ : M \to N$. Beweise, dass für alle $A, B \subseteq N$ gilt

1. $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$
2. $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$
3. $f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(A \backslash B)$.

**Aufgabe 2. Suprema**
Seien $A$ und $B$ nichtleere, beschränkte Mengen von reellen Zahlen. Beweisen Sie:

$$\sup{(A+B)} = \sup{(A)} + \sup{(B)}.$$

**Aufgabe 3. Induktion 1**
Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

als Funktion von $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Nehmen Sie an es handelt sich um ein Polynom in $n$.

**Aufgabe 4. Induktion 2**
Beweisen Sie:

1. $2^n < n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}; n \geq 4$
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} = (a+b)^n$

**Aufgabe 5. Potenzmengen**
Sei $X$ eine Menge und $\{0,1\}^X$ die Menge der Funktionen $f : X \to \{0,1\}$. Ferner bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Menge der Teilmengen von $X$. Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung

$$\mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X.$$

Wieviele Elemente hat $\mathcal{P}(X)$ falls $X$ endlich ist?

**Aufgabe 6. Körper**

1. Wieso gibt es keinen Körper mit nur einem Element?
2. Beweisen Sie, dass $\mathbb{K} := \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, mit den Operationen wie sie in $\mathbb{R}$ definiert sind, ein Körper ist.
3. Gehört $\sqrt{3}$ zu $\mathbb{K}$?