III. Reihen

III.1. Definitionen & allg. Kriterien

<u>Def.:</u> • Sei $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, dann heißt $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ „Folge der Partialsummen" oder „Reihe".

• konvergiert die Folge (s_n), so heißt die Reihe „konvergent". $\lim s_n$ heißt dann „Wert" der Reihe.

Bsp.: ∘ <u>Geometrische Reihe:</u> Für $|x|<1$ gilt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

Beweis: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x}$ da $x^{n+1} \to 0$ für $|x|<1$

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}$$

□

Ergebnisse & Rechenregeln für Folgen können nun auf Reihen angewandt werden:

<u>Satz:</u> (Cauchy-Kriterium für Reihenkonvergenz)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N \; \forall m \geq n : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

Beweis: folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen, da für die Partialsummen gilt: $|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right|$

□

<u>Satz:</u> (Nur Nullfolgen haben konvergente Reihen)

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert für $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, dann gilt $a_n \to 0$.

Beweis: Wegen Cauchy-Kriterium gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N: |a_n| = \left| \sum_{k=n}^{n} a_k \right| < \varepsilon$ □

<u>Bsp.:</u> Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ divergiert für alle x mit $|x| \geq 1$

Satz: (Reihen mit positiven Gliedern)

Wenn $a_n \geq 0$, dann gilt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ konvergiert} \iff (s_n) \text{ beschränkt}$$

Beweis: '$\Rightarrow$' da jede konvergente Folge beschränkt ist

'$\Leftarrow$' folgt aus Monotoniesatz für Folgen ◻

Satz: (Cauchy Verdichtungssatz)

Wenn $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, so daß $a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^l a_{2^l} \text{ konvergiert.}$$

Beweis: für $N, L \in \mathbb{N}$ mit $N < 2^L$ gilt

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \underset{\substack{\uparrow \\ a_n \geq 0}}{\leq} \sum_{l=0}^{L} \sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonie von } (a_n)}}{\leq} \sum_{l=0}^{L} 2^l a_{2^l} =: S_L$$

umgekehrt gilt für $N, L \in \mathbb{N}$ mit $N > 2^L$

$$s_N \underset{\substack{\uparrow \\ a_n \geq 0}}{\geq} \underbrace{a_1 + \sum_{l=1}^{L} \sum_{n=2^{l-1}+1}^{2^l} a_n}_{\sum_{n=1}^{2^L} a_n} \geq \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{L} 2^l a_{2^l} = \frac{1}{2} S_L$$

d.h. (s_n) ist genau dann beschränkt wenn (S_n) beschränkt ist.

◻

Bsp.: ◦ Harmonische Reihe

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ divergiert}}$$

Beweis: $a_{2^l} 2^l = \frac{1}{2^l} 2^l = 1$ ◻

__Satz:__ (Leibniz-Kriterium)

Wenn $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge ist, dann ist die „alternierende Reihe" $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

o.B.d.A. $a_n \geq 0$

Beweis:

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0 \Rightarrow (s_{2n-1}) \text{ mon. wachsend}$$

$$s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0 \Rightarrow (s_{2n}) \text{ mon. fallend}$$

Zudem gilt $s_2 \geq s_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \overset{\text{beschr. \& monoton}}{\Rightarrow} (s_{2n})$ & (s_{2n-1}) konvergent

$\Rightarrow \lim (s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim a_{2n} = 0 \Rightarrow$ identische Grenzwerte

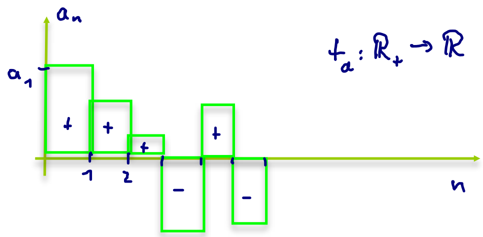
$\Rightarrow (s_n)$ eingeschlossen zw. zwei zum selben Grenzwert konvergierenden Folgen. □

Bsp.: Alternierende harmonische Reihe konvergiert:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k} \to \ln 2}$$

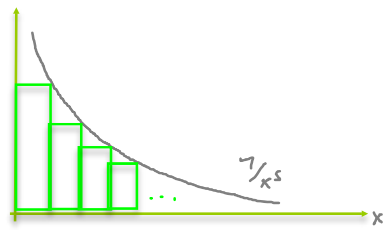
(Berechnung des Grenzwertes später ...)

III.2. Reihen und Integrale (Vorgriff)



$f_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ „Treppenfunktion" zu (a_n)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \int_0^n f_a(x)\,dx$$



Bsp.: __Riemann Zeta Funktion__

$$\boxed{\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}}$$ konvergiert für $s > 1$

Beweis:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^s} = 1 + \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{s-1}\frac{1}{n^{s-1}} + \frac{1}{s-1}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{s-1} < \infty$$

$\Rightarrow s_n$ beschränkt $\overset{\text{Satz über Reihen mit pos. Gliedern}}{\Rightarrow} s_n$ konvergiert □

Bem.:
- Berechnung von $\zeta(2)$ ist als „Basler Problem" bekannt. Euler zeigte 1735, daß $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$
- „Riemannsche Vermutung": alle „nicht-trivialen" Nullstellen in $\mathbb{C}$ erfüllen $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

(→ Hilbert 8, Clay 6)

III.3. Absolute Konvergenz & Umordnungen

Def.: $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ heißt „absolut konvergent" wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz: Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz.

Beweis: Cauchy-Kriterium $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall K \geq M > N : \sum_{n=M}^{K} |a_n| < \varepsilon$.

Wegen $\left| \sum_{n=M}^{K} a_n \right| \leq \sum_{n=M}^{K} |a_n|$ folgt mit Cauchy-Kriterium dann Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Def.: Sei $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion.
Dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_{g(k)}$ „Umordnung" der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz: Für jede reelle Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ die konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert, gibt es zu jedem reellen Zahlenpaar $\alpha \leq \beta$ eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{g(k)}$, so daß

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_{g(k)} = \alpha \; , \quad \limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_{g(k)} = \beta \; .$$

Satz: Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung gegen den selben Wert.

Beweisidee:

$$\left| \sum_{k=1}^{M} a_{g(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{M} a_{g(k)} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \right|}_{A} + \underbrace{\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|}_{B}$$

- $B < \varepsilon$ wenn N hinreichend groß
- wenn M groß genug für $\{g(1), \ldots, g(M)\} \supseteq \{1, \ldots, N-1\}$, dann gilt $A \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$ $\square$

III.4. Doppelreihen

Noch zwei Ergebnisse zu speziellen Umordnungen – ohne Beweis ...

Satz: (Satz von Fubini für Reihen)

Sei $a: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $A := \sum_m \sum_n a_{nm}$, $B := \sum_n \sum_m a_{nm}$.

Wenn A oder B absolut konvergiert, dann konvergiert für jede Abzählung $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{g(k)}$ absolut und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{g(k)} = A = B =: \sum_{n,m} a_{nm}$$

Beweis: → Königsberger

Satz: (Cauchy-Produkt von Reihen)

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen sind, dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{n} c_k$ mit $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Beweis: → Forster

III.5. Weitere Konvergenzkriterien

Satz: (Majorantenkriterium)

Wenn $|a_n| \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweisidee: Folgt aus dem Cauchy-Kriterium für Reihen, denn

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} b_k < \varepsilon$$

(für hinreichend großes N und $n \geq m \geq N$)

$\square$

Satz: (Quotientenkriterium) Sei $a_n \neq 0$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

Beweis: $\exists c < 1 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \ |a_{n+1}| \leq c|a_n|$

$\Rightarrow |a_{N+n}| \leq c^n |a_N| \ \forall n \in \mathbb{N}$

Anwendung des Majorantenkriterium mit geom. Reihe

$\Rightarrow \sum_k a_k$ konvergiert absolut

$\square$

Satz (Wurzelkriterium):

Sei $L := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt:

1) $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

2) $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

Beweis: $\rightarrow$ Übung