

Satz: Sei  $\tilde{\mathcal{L}}$  die Menge der Lösungen der DGL

$$x^{(n)}(t) + \sum x^{(k)}(t) = 0 \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{C}, \text{ und } p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit}$$

$$p(\lambda) := \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \quad \text{„Charakteristisches Polynom“}$$

Wenn  $\Lambda$  die Menge der Nullstellen von  $p$  ist, und für  $\lambda \in \Lambda$   $n(\lambda)$  die zugehörige Vielfachheit, dann gilt

$$\tilde{\mathcal{L}} = \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ t^m e^{\lambda t} \mid \lambda \in \Lambda \wedge 0 \leq m < n(\lambda) \right\}.$$

Beweis: Betrachte die zugehörige DGL 1ster Ordnung  $x' = Ax$  mit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

Es gilt  $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ , d.h.  $\Lambda = \{ \text{Eigenwerte von } A \}$

$\lambda \in \Lambda \Rightarrow \text{Rang}(\lambda I_n - A) = n-1$  da die ersten  $n-1$  Zeilen von  $\lambda I_n - A$  lin. unabh.

$\Rightarrow$  alle Jordanblöcke von  $A$  haben versch. Eigenwerte (sonst wäre Rang kleiner)

$\Rightarrow n(\lambda)$  ist Größe des Jordanblocks zu  $\lambda$ .

$\Rightarrow x_1(t) = (e^{tA} x_0)_1 \in \text{span}_{\mathbb{C}} \{ e^{t\lambda} t^m \mid \dots \} =: S$

$\Rightarrow \hat{\mathcal{L}} \subseteq S$

Da  $\dim(S) \leq n$  genügt  $\dim(\hat{\mathcal{L}}) = n$  um  $\hat{\mathcal{L}} = S$  zu zeigen.

Dazu betrachte wieder das 1ste Ordnung Sys. Hierfür ist  $\dim(\mathcal{L}) = n$ .

$\{ f_k(t) \}_{k=1}^n$  Basis von  $\mathcal{L} \Rightarrow (f_k)_1 \in \tilde{\mathcal{L}} \quad \forall k$

Angenommen  $\sum_k c_k (f_k)_1 = 0$ , dann gilt dies auch für alle Ableitungen,

so daß  $\sum_k c_k f_k = 0$  und damit  $c_k = 0 \quad \forall k$ .

D.h.  $(f_k)_1$  sind lin. unabh. für  $k=1, \dots, n$  und damit  $S = \tilde{\mathcal{L}}$ . □

Bemerkung: Wenn  $a_k \in \mathbb{R}$ , dann bilden auch die reellen Lsg.en  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

einen Vektorraum (über  $\mathbb{R}$ ). Dieser wird aufgespannt durch:

(i)  $e^{t\lambda} t^m$ ,  $0 \leq m < n(\lambda)$  für alle  $\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{R}$

(ii)  $t^m e^{rt} \cos(\omega t)$ ,  $t^m e^{rt} \sin(\omega t)$ ,  $0 \leq m < n(\lambda)$  für alle Paare

$(\lambda, \bar{\lambda}) = (r+i\omega, r-i\omega)$  konj. komplexer Nullstellen von  $p$ .

Bsp.: Sedämpfter harm. Oszillator

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \beta \geq 0, \omega > 0.$$

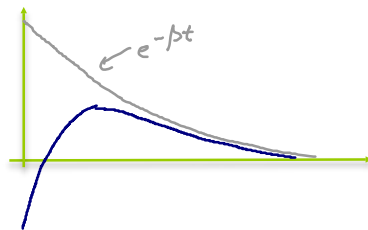
Charakt. Polynom:  $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0$   
 $\lambda = \left\{ -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \right\} =: \{ \lambda_+, \lambda_- \}$

Fall: „kritische Dämpfung“  $\beta = \omega$ , d.h.  $\lambda_+ = \lambda_- = -\beta$

$\Rightarrow$  Vielfachheit 2

$\Rightarrow$  allg. reelle Lösung

$$x(t) = e^{-\beta t} (c_1 + t c_2), \quad c_i \in \mathbb{R}$$



- höchstens ein Extremum
- $\rightarrow$  ein Nulldurchgang

Fall:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{unterkritische} \\ \text{überkritische} \end{array} \right.$  Dämpfung  $\left\{ \begin{array}{l} 0 < \beta < \omega \\ \omega < \beta \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = -\beta \pm \begin{cases} i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}, & \beta < \omega \\ \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \end{cases}$$

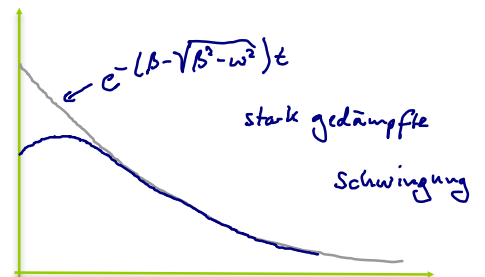
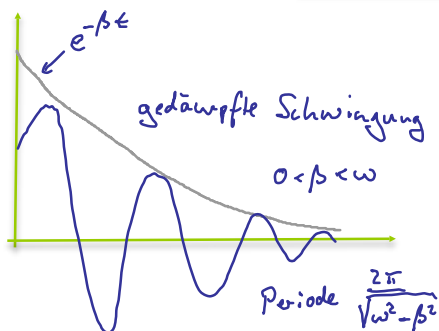
$\Rightarrow$  Vielfachheit 1, da  $\lambda_+ \neq \lambda_-$

$\Rightarrow$  allg. reelle Lsg.:

mit  $c_i \in \mathbb{R}$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left( c_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} t) + c_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} t) \right), \quad \beta < \omega$$

$$x(t) = c_1 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t} + c_2 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t}, \quad \beta > \omega$$



Graph qualitativ wie bei kritischer Dämpfung

## XI.2. Inhomogene lineare DGLen

Satz: Seien  $t \mapsto A(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $t \mapsto b(t) \in \mathbb{K}^n$ , und  $\mathcal{L}_b$  und  $\mathcal{L}_0$  die Mengen der Lösungen der inhomogenen bzw. homogenen DGL  $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ . Für  $y \in \mathcal{L}_b$  gilt

$$\mathcal{L}_b = \left\{ y(t) + x(t) \mid x \in \mathcal{L}_0 \right\}$$

Beweis:  $y, \tilde{y} \in \mathcal{L}_b \Rightarrow (\tilde{y} - y)' = A(\tilde{y} - y) \Rightarrow \tilde{y} - y \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{L}_0: \tilde{y} = y + x$   $\square$

D.h. um alle Lösungen der inhomogenen DGL zu finden, genügt es eine zu finden und zudem die Lösungen der homogenen DGL zu bestimmen.

Satz: Sei  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig,  $x_0 \in \mathbb{K}^n$ . Das AWP

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(0) = x_0$$

hat eine eindeutige Lösung der Form

$$x(t) = e^{tA} \left( x_0 + \int_0^t e^{-sA} b(s) ds \right)$$

Beweis:  $\dot{x}(t) = Ax(t) + e^{tA} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds$   
 $= Ax(t) + \underbrace{e^{tA} e^{-At}}_{\mathbb{1}} b(t) = Ax(t) + b(t) \quad \checkmark$  und  $x(0) = x_0 \quad \checkmark$

Seien nun  $x$  und  $\tilde{x}$  zwei Lösungen. Dann gilt für  $y(t) := x(t) - \tilde{x}(t)$

$$\frac{d}{dt} y(t) = Ay(t) \quad \text{und} \quad y(0) = 0$$

Die einzige Lösung dieser homogenen DGL ist jedoch  $y = 0$ .

$\square$

Bsp.: periodisch getriebener, gedämpfter harmonischer Oszillator (vgl. RLC Schwingkreis)

$$\ddot{x}(t) + 2\beta \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \quad \text{mit } f \text{ stetig \& } 2\pi\text{-periodisch}$$

Ansatz über Fourierdarstellung:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt}, \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{y}(k) e^{ikt}$$

Einsetzen  
→ 
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{y}(k) [(ik)^2 + 2ik\beta + \omega^2] e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

⇒ 
$$\hat{y}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{\omega^2 - k^2 + 2ik\beta}$$
 liefert spezielle Lsg. sofern  
Fourierreihe konvergiert

Bsp.:  $f(t) = \cos(t) \Rightarrow y(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{it}}{\omega^2 - 1 + 2i\beta} \right]$   
$$= \frac{(\omega^2 - 1) \cos t + 2\beta \sin t}{(\omega^2 - 1)^2 + 4\beta^2}$$

→ allg. Lösung durch Addition der homogenen Lsg.