Für $f \in R$ und $P_n f := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e_k$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\boxed{\|f - P_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2}$$

Bemerkung: $P_n f$ ist die Projektion von f auf den Unterraum $\{e_k\}_{|k| \le n}$

Beweis: L.S. $= \langle f - P_n f, f - P_n f \rangle = \|f\|_2^2 + \underbrace{\langle P_n f, P_n f \rangle}_{(i)} - \underbrace{\langle f, P_n f \rangle}_{(ii)} - \underbrace{\langle P_n f, f \rangle}_{(iii)}$

$$(i) = \sum_{k,l=-n}^{n} \overline{\hat{f}(k)}\, \hat{f}(l) \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{k,l}} = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2$$

$$(ii) \quad \langle f, P_n f \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \underbrace{\langle f, e_k \rangle}_{\overline{\hat{f}(k)}} = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2$$

$$(iii) \quad \langle P_n f, f \rangle = \overline{\langle f, P_n f \rangle}$$

□

Satz: (Riemann-Lebesgue) Für $f \in R$ gilt:

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \hat{f}(k) = \lim_{k \to -\infty} \hat{f}(k) = 0}$$

Beweis: aus obigem Lemma folgt $\|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \ge 0$ und damit

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \le \|f\|_2^2 < \infty$$

Konvergenz der Reihe impliziert dass $|\hat{f}(k)|$ für $|k| \to \infty$ Nullfolge ist. □

Bemerkung: daraus folgt z.B. $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \to 0$ für $n \to \infty$

ebenso $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt \to 0$ — " —

Satz: Sei $f \in C^{(n)}([-\pi, \pi])$ so daß $f^{(k)}(\pi) = f^{(k)}(-\pi)$ $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$. Dann gilt

(gilt für 2π-periodische Funktionen)

① $\boxed{\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \hat{f}(k)}$

② $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: $\boxed{|\hat{f}(k)| \le \frac{c}{|k|^n}}$ mit $c := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(n)}(x)|\, dx$

Beweis: ①

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(x)\, e^{-ikx}\, dx \overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{2\pi} \left[f^{(n-1)}(x)\, e^{-ikx} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n-1)}(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{f^{(n-1)}(\pi)}{2\pi} \underbrace{\left(e^{-ik\pi} - e^{ik\pi} \right)}_{\sim \sin(k\pi) = 0} + ik\, \widehat{f^{(n-1)}}(k) = ik\, \widehat{f^{(n-1)}}(k)$$

$\Rightarrow$ ① durch Iteration.

② $\hat{f}(k) \overset{①}{=} \frac{1}{(ik)^n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \quad (x)\, e^{-ikx}\, dx \Rightarrow |\hat{f}(k)| \le \frac{c}{|k|^n}$ □

Bemerkung:

f	$\hat{f}$
Ableitung	Multiplikation mit ik
'Glattheit' von f	'Abfall' von $\hat{f}$

(Dies wird bei der Diskussion von Differentialgl. en sehr hilfreich sein.)

IX.2. Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

Def.: $\boxed{D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}}$ heißt „Dirichlet Kern" $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

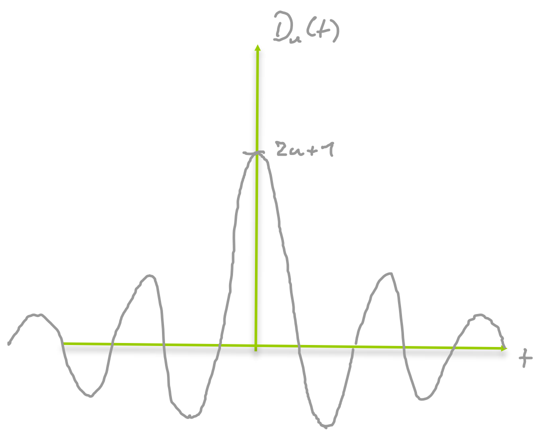
Lemma:

① $\boxed{D_n(t) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin(t/2)}}$ $\forall t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$

(dies nennt man „Faltung" von f mit D_n)

② $\boxed{\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, dt}$ $\forall$ 2π-periodischen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f|_{[-\pi,\pi]} \in R$

③ $\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1}$



Beweis:

① $(e^{it} - 1)\, D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+1)t} - e^{ikt} = e^{i(n+1)t} - e^{-int}$

Multiplizieren der Gleichung mit $e^{-it/2}$ ergibt dann

$$D_n(t) = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}$$

② $\text{L.S.} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)}\, dy \underset{\text{Substit. } t = x-y}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, dt$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, dt$ (da sowohl D_n als auch f 2π-periodisch)

③ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\,dt = \underbrace{1}_{\text{für } k=0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\left[\sum_{k>1}\frac{1}{ik}e^{ikt} - \frac{1}{ik}e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0 \text{ da } \sim\sum_k \sin(k\pi)}$

Satz: (Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen)

Wenn $f \in R$ in einer Umgebung von x Lipschitzstetig ist, dann gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\,e_k(x) = f(x)}$$

Beweis: $\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\,e_k(x) - f(x) \overset{②\&③}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x-t)-f(x)\right)D_n(t)\,dt$ | $g(t) := \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)}$, $g(0) := 0$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$ | $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\left(g(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)}\sin(nt) + \underbrace{\left(g(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)}_{\text{beschränkt \& in } R}\cos(nt)\;dt$

$\to 0$ für $n\to\infty$ wegen Riemann-Lebesgue. □

Bemerkung:
- Dies ist formuliert für $f\in R$, gilt aber für alle 2π-periodischen Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$
- Ist L die Lipschitz-Konstante, so kann man zeigen, dass

$$\boxed{\left|f(x) - P_n f(x)\right| \leq \frac{8L}{\sqrt{n}}}$$

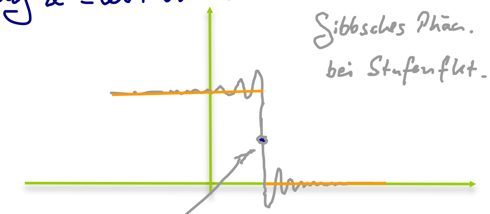
Korollar: Wenn für ein Intervall I gilt, dass $h(t) = g(t)$ $\forall t\in I$, dann gilt

$\forall x\in I$: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left(\hat{h}(k)-\hat{g}(k)\right)e_k(x) = 0}$ $= F_h(x) - F_g(x)$

Beweis: Anwendung des vorigen Satzes auf $f = h-g$. □

Bemerkung: Für Taylor-Reihen gilt: $f(I) = g(I) \Rightarrow f = g$
Aus Korollar/Satz folgt, dass dies für Fourierreihen nicht zwingend ist.

<u>ohne Beweis:</u> ∘ In der Umgebung von Sprungstellen liegt nie gleichm. Konvergenz vor. Dort treten Über-/Unterschwingungen auf, die ~ 9% der Sprunghöhe ausmachen. Dieses „Gibbssche Phänomen" führt zu Artefakten z.B. in der Bildbearbeitung & Elektronik.



∘ Ist $f \in R$ stückweise stetig diff.bar und existieren an der Stelle x die Grenzwerte $f_\pm := \lim_{t \downarrow 0} f(x \pm t)$, dann gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P_n f(x) = \tfrac{1}{2}(f_+ + f_-)}$$

∘ $f \in C^0(\mathbb{R})$ 2π-periodisch $\Rightarrow$ $\exists$ eine Folge von Trig. Polynomen, die gleichmäßig gegen f konv. (= Weierstrass'scher Approx.satz für periodische Fkt.)

<u>Einschub:</u>

<u>Lemma:</u> (Cesàro Mittel) Für $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \to a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k} \to a$$

„Cesàro-Mittel"

<u>Beweis:</u> $\forall \delta > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N: |a_n - a| < \delta$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}(a_k - a)\right| + \delta \to \delta \text{ für } n\to\infty$$

wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ und n, so daß $\left|\sum_{k=1}^{N}(a_k - a)\right| \leq n\frac{\varepsilon}{2}$

□

Wenn die Folge von Cesàro-Mittel konvergiert heißt $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ „Cesàro-summierbar".

Es gilt a_n konvergiert $\Rightarrow$ a_n Cesàro-summierbar (s.o.)

$\not\Leftarrow$

Dies steckt z.B. hinter dem Weierstrass'schen Approximationssatz für periodische Fkt.en:

zwar gilt $P_n f \to f$ nicht allgemein für $f \in C^0(\mathbb{R})$

aber $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_k f \to f}$ gleichmäßig für alle 2π-periodischen $f \in C^0(\mathbb{R})$