Nachtrag: (Riemann Integral für komplexe Funktionen)

Wenn $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ so ist, dass $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ Riemann integrierbar sind (ggfs. durch uneigentliche Integrale), dann definieren wir

$$\boxed{\int_I f(x)\,dx := \int_I \mathrm{Re}(f(x))\,dx + i\int_I \mathrm{Im}(f(x))\,dx}$$

Bsp.: $k \neq 0$, $\displaystyle\int_a^b e^{ikx}\,dx = \int_a^b (\cos(kx) + i\sin(kx))\,dx \overset{k\neq 0}{=} \left[\frac{1}{k}\sin(kx) - \frac{i}{k}\cos(kx)\right]_a^b$

$$= \left[\frac{1}{ik}e^{ikx}\right]_a^b$$

IX. FOURIER ANALYSIS

IX.1. Definitionen & elementare Eigenschaften

Motivation:
- Approximation / Darstellung periodischer Funktionen (Schwingungen, Wellen, oszillierende Signale). Hierzu sind periodische Basisfunktionen besser geeignet als (nicht-periodische) Polynome à la Taylor / Bernstein.
- Frequenzanalyse

Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt periodisch mit Periode $p > 0$ (kurz: „p-periodisch"), wenn

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x+p)}.$$

Bsp.:
- $\cos(x)$, $\sin(x)$ sind beide 2π-periodisch.
- f p-periodisch $\Rightarrow$ $x \mapsto f(\frac{p}{q}x)$ q-periodisch für $q > 0$

  d.h. $t \mapsto \cos(2\pi\omega t)$ hat Periode $\frac{1}{\omega}$ (ω = „Frequenz")

Def.:
- Für $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$ heißt $\boxed{x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}} =: S_n(x)$ „Trigonometrisches Polynom" (oder Fourier Polynom)
- $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}}$ heißt „Fourierreihe".
- Die a_k's heißen „Fourierkoeffizienten".

Ziel: Wir wollen 2π-periodische Funktionen durch Fourier-Polynome approximieren bzw. durch Fourierreihen darstellen.

Def.:
- $\mathcal{R} := \{ f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \text{ stückweise stetig} \}$ d.h. höchstens endl. viele Sprungstellen & an jedem Punkt exist. beide halbseitige Grenzwerte $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x \pm \varepsilon)$
- Für $f,g \in \mathcal{R}$: $\boxed{\langle f,g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx}$
- Für $f \in \mathcal{R}$: $\boxed{\|f\|_2 := \sqrt{\langle f,f \rangle}}$

Wichtige Eigenschaften:

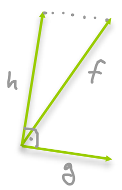
(1) $\mathcal{R}$ ist eine „Algebra" über $\mathbb{C}$, d.h. es gilt
- $f,g \in \mathcal{R} \Rightarrow f+g \in \mathcal{R}$ } Vektorraum
- $c \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{R} \Rightarrow cf \in \mathcal{R}$
- $f,g \in \mathcal{R} \Rightarrow fg \in \mathcal{R}$ + Distributivgesetz } Algebra
- außerdem gilt $f \in \mathcal{R} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{R}$

(2) $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$ definiert ein „Skalarprodukt" (od. „inneres Produkt")
D.h. für alle $f,g,h \in \mathcal{R}$ und $c \in \mathbb{C}$ gilt
- „Sesquilinearität" $\boxed{\langle f, g+ch \rangle = \langle f,g \rangle + c \langle f,h \rangle}$
- „Hermitizität" $\boxed{\langle f,g \rangle = \overline{\langle g,f \rangle}}$
- „Positiv Definitheit" $\boxed{\langle f,f \rangle \geq 0}$

(3) $f \mapsto \|f\|_2$ ist eine „Halbnorm" d.h. für $f,g \in \mathcal{R}$, $c \in \mathbb{C}$ gilt:
- „Homogenität" $\boxed{\|cf\|_2 = |c|\, \|f\|_2}$
- „Dreiecksungl." $\boxed{\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2}$

(Es wäre eine „Norm", wenn zudem $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ gelten würde.
Dies ist aber nicht der Fall. z.B. $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \|f\|_2 = 0 \wedge f \neq 0$)

Satz: (Cauchy Schwarz Ungl.) Für $f, g \in R$ gilt:



$$\boxed{|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2}$$

Beweis: $h := f - \frac{\langle f, g\rangle}{\|g\|_2^2} \, g$ so definiert, dass $\langle h, g\rangle = 0$ (wir nehmen $\|g\|_2 > 0$ an, da anderenfalls $|\langle f, g\rangle| = 0$)

Damit gilt $\langle f, f\rangle = \langle h + \frac{\langle f, g\rangle}{\|g\|_2^2} g, \; h + \frac{\langle f, g\rangle}{\|g\|_2^2} g\rangle$

$$= \underbrace{\langle h, h\rangle}_{\geq 0} + \frac{|\langle f, g\rangle|^2}{\|g\|_2^2} \geq \frac{|\langle f, g\rangle|^2}{\|g\|_2^2}$$

$\square$

Bemerkung:
- mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungl. zeigt man die Dreiecksungl. für $\|\cdot\|_2$
- wie aus Beweis klar wird, gilt dies für jedes Skalarprodukt & zugh. (Halb-)norm

Def.:
- Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir $e_k : x \mapsto e^{ikx}$
- Für $f \in R$ heißt $\boxed{\hat{f}(k) := \langle e_k, f\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, e^{-ikx} \, dx}$ „k'ter Fourier-koeffizient" von f.
- Die „Fourierreihe" von $f \in R$ ist definiert als

$$\boxed{F_f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \, e_k(x)}$$

Satz: Die Funktionen $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ bilden ein „Orthonormalsystem" in R. D.h.

$$\boxed{\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl}} := \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \qquad (\delta = \text{„Kronecker Delta"})$$

Beweis:
- $\underline{k = l}$: $\langle e_k, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$ ✓
- $\underline{k \neq l}$: $\langle e_k, e_l\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ix(l-k)] \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{i(l-k)} e^{ix(l-k)} \right]_{-\pi}^{\pi}$

$$= \frac{1}{\pi(l-k)} \sin(\pi(l-k)) = 0 \quad (\text{da } \sin(\pi n) = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{Z})$$

$\square$

Korollar: Sei $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \, e^{ikx}$ dann gilt

(i) $\hat{f}(k) = a_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \iff a_{-k} = \overline{a_k} \;\; \forall k$

<u>Beweis:</u> (i) $\hat{f}(k) = \langle e_k, f \rangle = \sum_{l=-n}^{n} a_l \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{kl}} = a_k$

(ii) angenommen $f(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$

$$a_k \overset{(i)}{=} \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \Rightarrow \overline{a_k} = a_{-k}$$

umgekehrt gilt $\sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \overset{\overline{a_k} = a_{-k}}{=} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_k e^{ikx} + \overline{a_k}\, e^{-ikx}}_{2\mathrm{Re}(a_k e^{ikx})}$ $\square$

Bemerkung:
- Fourierkoeffizienten sind Komponenten des Vektors $f \in \mathcal{R}$ bezgl. des Orthonormalsystems $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- grob gesprochen ist $\hat{f}(k)$ der Anteil von f mit „Frequenz" $\frac{k}{2\pi}$

- Analogie:

	$\mathbb{C}^n$	$\mathcal{R}$
Vektor	$(v_1, \dots, v_n)$	$f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$
O.N.S.	$e_k = (0 \dots 0, 1, 0 \dots 0)$ ↑ k'te Stelle, $k = 1, \dots, n$	$e_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$
Skalarprodukt	$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k} w_k$	$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$
Norm	$\lVert v \rVert = \langle v, v \rangle^{1/2}$	$\lVert f \rVert_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}$ (nur Halbnorm)