- „Kleinwinkelnäherungen":

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + O(\varphi^4)$$
$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + O(\varphi^5)$$

- Relativistische Energie-Impuls Beziehung:

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2}$$

N.R.: $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3) \quad \text{für } x \to 0$$

$$\Rightarrow E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{p}{m_0 c}\right)^4 + O\left(\left(\frac{p}{m_0 c}\right)^6\right)\right)$$
$$= \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{p^2}{2m_0}}_{\text{nicht-rel. Kinetische Energie}} - \frac{p^4}{8 m_0^3 c^2} + O\left(\left(\frac{p}{m_0 c}\right)^6\right)$$

VIII.2. Taylor-Reihen

Def.: Für $f \in C^\infty(I)$ heißt die Potenzreihe

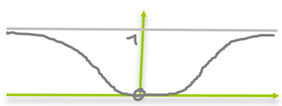
$$\boxed{T(x;a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{n!} (x-a)^k}$$

„Taylorreihe" von f um $a \in I$.

Def.: f heiß „reell analytisch" auf I, wenn

$$\boxed{\forall y \in I \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in B_\varepsilon(y) : f(x) = T(x;y)}$$

Bemerkungen:
- Für $x \neq a$ muß die Taylorreihe nicht konvergieren.
- Wenn sie konvergiert, gilt nicht notwendigerweise $f(x) = T(x;a)$



Bsp.: Für $f(x) := e^{-1/x^2}$ mit $f(0) := 0$ gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\forall n \in \mathbb{N}_0: f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{T(x;0) = 0}}$

$f(x)$ ist nicht reell analytisch.

- $\forall x \in I: \quad f(x) = T(x;a) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Satz: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$.

Dann gilt $\quad T(x;0) = f(x) \quad \forall |x| < R$.

(Analog gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = T(x;a)$)

Beweis: durch Differenzieren erhält man $f^{(n)}(0) = \frac{a_n}{n!}$ $\square$

Beispiele:
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

VIII.3. Approximationssatz von Weierstrass

Satz: (Weierstrass)
Sei $f \in C(I)$ eine reelle Funktion auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, dann gibt es eine Folge von Polynomen, die auf I gleichmäßig gegen f konvergiert.

Vor der Beweisskizze ein paar Definitionen:

- Für $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ definieren wir $p_{n,k} : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\boxed{p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$$

  Für diese kann man zeigen, dass

  (1) $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 1$

  (2) Für alle $\delta > 0$ gilt $\sum_{k \in \Delta} p_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$ (ohne Beweis)

  mit $\Delta := \{ k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq n \wedge |k - nx| \geq n\delta \}$

  abh. von x, δ und n

- Für $f \in C([0,1])$ heißt

$$\boxed{B_n^{(f)}(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x)}$$

  das n-te „Bernstein-Polynom".

Beweis des Weierstrass'schen Approximationssatzes:

- zunächst für $I = [0,1]$. Wir wollen zeigen, daß $B_n^{(f)} \to f$ gleichmäßig.

  $f \in C(I) \Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf I (da I kompakt)

  D.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in I : \quad |x - x'| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \le \varepsilon$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - B_n^{(f)}(x)| &\overset{(1)}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) p_{n,k}(x) \right| \\
&\le \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k \in \Delta^c} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x) + \sum_{k \in \Delta} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x) \\
&\le \quad \varepsilon \quad p_{n,k}(x) \quad + 2\|f\|_\infty \sum_{k \ \Delta} p_{n,k}(x) \\
&\overset{(1),(2)}{=} \quad \varepsilon \quad + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\limsup_{n \to \infty} |B_n^{(f)}(x) - f(x)| \le \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in I$ und

somit $\|B_n^{(f)} - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

Sei nun $\tilde{f} \in C([a,b])$. Definiere $\varphi : [0,1] \to [a,b]$, $x \mapsto (b-a)x + a$

φ und φ^{-1} sind stetig, so dass der Satz für $\tilde{f}$ folgt aus

Approximation von $f := \tilde{f} \circ \varphi$ durch Bernsteinpolynome, da

$$
\sup_{x \in [a,b]} \left| \tilde{f}(x) - B_n^{f} \circ \varphi^{-1}(x) \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \tilde{f} \circ \varphi(x) - B_n^{(f)}(x) \right|
$$

$\square$

Bemerkungen:
- „Bézier Kurven" (Computer-Grafik) verwenden die Bernstein Basis-Polynome $p_{n,k}(x)$.
- Wenn $f \in C^n([0,1])$, dann gilt auch, dass $\forall k \le n: \quad \|f^{(k)} - B_n^{(f)(k)}\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$