VII.3. Partielle Integration & Substitution

Durch Integration der Produktregel $\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$ erhält man:

Satz (partielle Integration):

$$f, g \in C^1([a,b]) \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

und analog für die Stammfunktionen (= „unbestimmte Integrale")

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

Bsp.: (1)

$$\int_a^b \ln(x)\,dx \overset{\substack{f(x)=\ln(x),\ g'(x)=1 \\ \downarrow}}{=} \left[x\ln(x)\right]_a^b - \underbrace{\int_a^b \frac{x}{x}\,dx}_{(b-a)} = \left[x\left(\ln(x)-1\right)\right]_a^b$$

(für $b > a > 0$)

(2)

$$\int \underbrace{\cos(x)^2}_{fg'}\,dx = \underbrace{\cos(x)}_{f}\,\underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{\sin(x)}_{g}\,\underbrace{(-\sin(x))}_{f'}\,dx$$

$$= \cos(x)\sin(x) + \int \left(1 - \cos(x)^2\right)dx$$

$$\Rightarrow \int \cos(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\cos(x)\sin(x) + x\right)$$

Aus der Kettenregel der Differentialrechnung folgt eine weitere Integrationsmethode:

Satz: (Substitutionsregel)

Sei $g \in C^1([a,b])$, $g([a,b]) \subseteq (c,d)$, $f \in C^0([c,d])$. Dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(g(y))\,g'(y)\,dy = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx}$$

Merkregel: ersetze $x = g(y)$, „$dx = \frac{dx}{dy}dy = g'(y)dy$"

Beweis: $F(x) := \int_c^x f(y)\,dy$, $x \in [c,d]$

Kettenregel $\Rightarrow (F\circ g)' = (F'\circ g)g' = (f\circ g)g'$ auf $[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(g(y))\,g'(y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{HDI}}}{=} \left[F\circ g\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx \quad \square$$

Korollar: Sei $g \in C^1([a,b])$, so daß $g(y) \neq 0$ für alle $y \in [a,b]$

Dann gilt: $\boxed{\int_a^b \frac{g'(y)}{g(y)}\, dy = \left[\ln|x|\right]_{g(a)}^{g(b)}}$

Beweis: folgt aus Substitutionsregel mit $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int_a^b \frac{g'(y)}{g(y)} dy = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln|x|\right]_{g(a)}^{g(b)} \qquad \square$$

$\Big($ für $x > 0$: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$x < 0$: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ $\Big)$

Beispiele: ① für $[a,b] \subseteq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt

$$\int_a^b \tan(x)\, dx = \Big[-\ln(\cos(x))\Big]_a^b$$

$\tan = -\frac{\cos'}{\cos}$

② $$\int_a^b \arctan(x)\, dx = \Big[x \arctan(x)\Big]_a^b - \underbrace{\int_a^b \frac{x}{1+x^2}\, dx}$$

PI mit $f = \arctan$, $g(x) = x$

$= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx$, $g(x) = x^2 + 1$

$= \frac{1}{2} \Big[\ln|x|\Big]_{a^2+1}^{b^2+1}$

$$= \Big[x \arctan(x) - \tfrac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big]_a^b$$

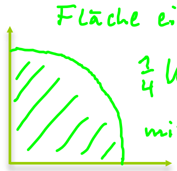
③ $$\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(x)^2}\, \cos(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\cos(x)\sin(x) + x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Substitution mit $f(y) = \sqrt{1-y^2}$, $g(x) = \sin(x)$

„Fläche einer $\frac{1}{4}$ Kreisscheibe mit Radius 1"



Bemerkungen:

- Jede „rationale Fkt." (= Bruch von Polynomen) mit reellen Koeffizienten läßt sich integrieren mittels rat. Fkt.en, des Logarithmus & des arctan.
- nicht durch elementare Fkt.en darstellbar sind folgende Integrale:
  - $\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ „Gauss'sche Fehlerfunktion"

- $Li(x) := \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt$ „Integrallogarithmus"

- $Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ „Integralsinus"

  (es gilt jedoch $\lim_{x\to\infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}$)

- Vorsicht mit unbeschränkten Funktionen: z.B. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx \neq \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{2}$

- Manchmal helfen „Symmetrien" bei der Integration:
  - $f(x) = f(-x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$
  - $f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ —"— $= 0$

VII.4. Uneigentliche Riemann Integrale

Was tun wenn das Intervall nicht kompakt oder die Funktion darauf nicht beschränkt ist?

z.B. $\int_0^\infty e^{-x}\, dx = ?$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = ?$

Def.: Für ein Interval $I \subseteq \mathbb{R}$ definiere $R(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f$ integrierbar auf jedem kompakten Intervall in $I \}$

- Für $I = [a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a \in \mathbb{R}$, $f \in R(I)$ definiere

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x)\, dx}$$

  und analog für $I = (a, b]$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$.

- Für $I = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

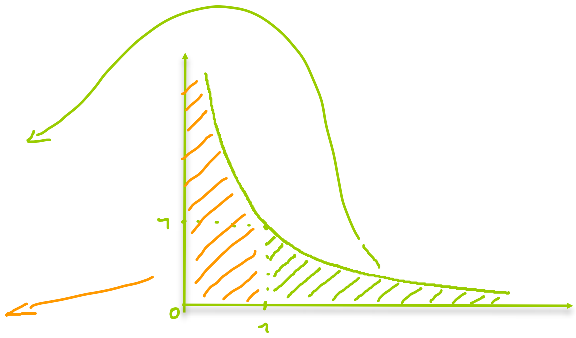
$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx}$$ für bel. $c \in (a, b)$

- Diese „uneigentlichen Integrale" heißen „konvergent" falls die Limiten existieren und „absolut konvergent" falls das Integral über $|f|$ konvergent ist.

Beispiele:

① $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ \infty, & p\le 1\end{cases}$$

da $$\int_1^\beta \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}\left(1-\beta^{1-p}\right), & p\ne 1\\ \ln\beta, & p=1\end{cases}$$



② $$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{1-p}, & p<1\\ \infty, & p\ge 1\end{cases}$$

da $$\int_\alpha^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{1-p}\left(1-\alpha^{1-p}\right), & p\ne 1\\ -\ln\alpha, & p=1\end{cases}$$

③ $$\int_0^\infty e^{-cx}\,dx = \frac{1}{c} \quad \text{für } c>0$$

da $$\int_0^\beta e^{-cx}\,dx = \frac{1}{c}\left(1-e^{-\beta c}\right) \to \frac{1}{c} \quad \text{für } \beta\to\infty$$

Satz: (Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale)
Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall (möglicherweise offen, oder mit Grenzen $\pm\infty$) und für alle $a,b\in I$: $f,g\in R([a,b])$, $\int_I f(x)\,dx$ konvergent und $\forall x\in I: |g(x)|\le f(x)$.
Dann ist g absolut integrierbar (d.h. $\int_I |g(x)|\,dx$ konvergent) und

$$\boxed{\int_I |g(x)|\,dx \le \int_I f(x)\,dx}$$

Beweis: $G(x) := \int_c^x |g(t)|\,dt$ ist monoton wachsend & beschränkt, da $G(x) \le \int_c^x f(t)\,dt$. Damit existiert $\lim_{\beta\nearrow b} G(\beta) \le \int_c^b f(t)\,dt$, $b:=\sup I$.
Analog für Limes der unteren Integrationsgrenze. □