7. Stammfunktionen

Def.: Eine diff.bare Funktion $F: I \to \mathbb{C}$ (wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist) heißt „Stammfunktion" zu $f: I \to \mathbb{C}$, wenn $\boxed{F' = f}$.

Bsp.:
- $F(x) = \sinh(x) + c$, $f(x) = \cosh(x)$, $c \in \mathbb{C}$
- $F(x) = \arctan(x) + c$, $f(x) = (1+x^2)^{-1}$, $c \in \mathbb{C}$

Lemma: Sei $f: I \to \mathbb{C}$ diff.bar mit $\forall x \in I: f'(x) = 0$.
Dann gilt: $\exists c \in \mathbb{C}: \forall x \in I: f(x) = c$.

Beweis: Mittelwertsatz $\Rightarrow$ $\forall x_1 \forall x_2: f(x_1) - f(x_2) = 0$ $\square$

Satz: Wenn F Stammfunktion von f, dann ist
G Stammfunktion von f $\Leftrightarrow$ $\exists c \in \mathbb{C}: F - G = c$

Beweis: $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$.
Satz folgt damit aus dem Lemma. $\square$

Bem.: Manchmal wird lediglich Diff.barkeit von F für fast alle $x \in I$ verlangt & dort $F' = f$. Der Satz gilt dann ebenso, falls F und G stetig sind.

Notation: Die Menge der Stammfunktionen von f wird mit „$\int f(x)\,dx$" abgekürzt.

Es folgt: Konstruktion von Stammfunktionen ...

VII. RIEMANN INTEGRATION

Wir beschränken uns im 1. Sem. auf Fkt. der Form $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

VII.1. Riemann Integrierbarkeit

Def.:
- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt „Treppenfunktion", wenn es eine Zerlegung des Intervals $[a,b]$ von der Form $a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$ mit $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß
$$\forall k \in \{1, \dots, n\}\ \exists c_k \in \mathbb{R}: \boxed{x \in (x_{k-1}, x_k) \Rightarrow f(x) = c_k}.$$
- Die Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $T[a,b]$.

Bem.: • $T[a,b]$ ist „Vektorraum", d.h.

$$\forall \varphi, \psi \in T[a,b]\ \forall \mu \in \mathbb{R}: (\varphi + \mu\psi) \in T[a,b]$$

• $\varphi(x_k)$ nicht festgelegt

Def.: Für $\varphi \in T[a,b]$ mit $x \in (x_{k-1}, x_k) \Rightarrow \varphi(x) = c_k$ definieren wir das „Riemann Integral" $\boxed{\int_a^b \varphi(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n} c_k \Delta x_k}$ wobei $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$.

Bem.: • Dies entspricht der „Fläche" unter dem Graphen

• Integral ist unabh. von Zerlegung, da $c\Delta = c\lambda\Delta + c(1-\lambda)\Delta$

• Integral ist monotones, lineares „Funktional" (d.h. Abb. von Funktionen auf Zahlen) auf $T[a,b]$, d.h.

$I : T[a,b] \to \mathbb{R}$ mit • $\varphi, \psi \in T[a,b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$I(\varphi + \lambda\psi) = I(\varphi) + \lambda I(\psi)$ } Linearität

• $\varphi, \psi \in T[a,b],\ \varphi \leq \psi \Rightarrow$
$I(\varphi) \leq I(\psi)$ } Monotonie

Def.: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

• $\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \mid \varphi \in T[a,b] \wedge \varphi \geq f \right\}$ „Oberintegral"

• $\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \mid \varphi \in T[a,b] \wedge \varphi \leq f \right\}$ „Unterintegral"

• Falls $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$ nennen wir dies „Riemann Integral" und die Funktion f „Riemann integrierbar".

• $\boxed{\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx}$

Bem.: • Auf der Menge der Riemann integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ ist das Riemann Integral ein lineares, monotones Funktional.

- nicht alle Fuktionen sind Riemann integrierbar, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1, \quad \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$$

- Wenn f durch $C \in \mathbb{R}_+$ beschränkt ist ($|f(x)| \leq C$), dann gilt

$$C(a-b) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq C(b-a)$$
, d.h. insbesondere daß $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ und $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ existieren.

- Wenn $c \in (a,b)$ dann existiert $\int_a^b f(x)dx$ g.d.w. $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ existieren. In dem Fall gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

- Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar und $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$, so gilt:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ c, & x = x_0 \end{cases} \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

- Im folgenden meint „integrierbar" und „Integral" stets „Riemann integrierbar" und „Riemann Integral".

<u>Satz:</u> Jede monotone und jede stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

<u>Beweis:</u> zu bel. $n \in \mathbb{N}$ definiere $\Delta := \frac{(b-a)}{n}$

$$I_k := [a + (k-1)\Delta, a + k\Delta), \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$I_n := [b - \Delta, b]$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{c}_k := \sup\{f(x) \mid x \in I_k\} \\ \underline{c}_k := \inf\{f(x) \mid x \in I_k\} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^n \Delta(\overline{c}_k - \underline{c}_k) =: S_n$$

(1) f monoton (o.B.d.A. steigend)

$$S_n \leq \sum_{k=1}^n \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)\Delta \underset{\text{„Teleskopsumme"}}{=} \left(f(b) - f(a)\right)\Delta \to 0 \text{ mit } n \to \infty$$

(2) f stetig auf $[a,b] \Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf $[a,b]$

$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, x' \in [a,b] : \; |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

$S_n \leq \max\limits_k \; (b-a)(\overline{c_k} - \underline{c_k}) \; =: \; (b-a)\left(f(x) - f(x')\right)$

wähle $N \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n > N: \; \frac{(b-a)}{n} < \delta$. Dann gilt

$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N: \; S_n \leq (b-a)\,\varepsilon$

und damit $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$

□

Korollar: Jede stückweise stetige bzw. stückweise monotone Funktion ist integrierbar.

VII.2. Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung

Satz: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \; \exists y \in [a,b] : \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(y)\,(b-a)$

Beweis: $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \; \leq \; (b-a)^{-1} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \; \leq \; \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow \; \exists y \in [a,b] : \; f(y) = (b-a)^{-1} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

□

Satz: Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ auf $[a,b]$ diff.bar und $F' = f$.

Beweis: $$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \underset{\uparrow}{=} f(y_h) \quad \text{für ein } y_h \in [x, x+h]$$

Mittelwertsatz

Für $h \to 0$ gilt $y_h \to x$ und wegen Stetigkeit $f(y_h) \to f(x)$.

□

Bem.: Wenn f nur stückweise stetig ist, gilt der Satz nicht an den Unstetigkeitsstellen.

Satz: (Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung, HDI)
Wenn $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, und F eine Stammfunktion von f, dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} =: [F]_a^b$$

Beweis: $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist Stammfunktion von f. Für jede andere Stammfunktion F gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $F = G + c$.
Somit gilt: $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt$

$\square$

Bsp.:

① $\int_a^b x^p\,dx = (p+1)^{-1}\left[x^{p+1}\right]_a^b$, $p \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $a, b > 0$, da $\left(x^{p+1}\right)' = (p+1)\,x^p$.

② $\int_a^b \sinh(x)\,dx = \cosh(b) - \cosh(a)$ da $\cosh' = \sinh$.

③ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\operatorname{arcsinh} x\right]_0^1 = \operatorname{arcsinh}(1)$

da $(\operatorname{arcsinh})' = \frac{1}{\sinh' \circ \operatorname{arcsinh}} = \frac{1}{\cosh \circ \operatorname{arcsinh}} \overset{\cosh^2 - \sinh^2 = 1}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$