VI. Differentialrechnung

1. Def. der Ableitung

Wir beschränken uns im 1. Sem. auf Funktionen der Form
$f: D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Def.: ∘ $f: D \to \mathbb{C}$ heißt „differenzierbar" in $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \frac{df}{dx}(x_0)}$$
existiert.

Dieser heißt „Differentialquotient" oder „Ableitung" von f in x_0.

∘ f heißt differenzierbar auf D, wenn $\frac{df}{dx}(x_0)$ für alle $x_0 \in D$ existiert.

∘ Rekursiv definiert $f^{(n)}: D \to \mathbb{C}$ mit $f^{(n)} = \frac{df^{(n-1)}}{dx}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f^{(0)} = f$ die „n-te Ableitung".

∘ f heißt n-mal (stetig) differenzierbar, falls $f^{(n)}$ existiert (und stetig ist).

Bemerkung: ∘ Viele alternative Schreibweisen:
$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = f'\Big|_{x_0} = Df(x_0) = f_x(x_0) = \dot{f}(x_0) = \ldots$$
(typ. in Physik, wenn Variable 'Zeit' ist)

∘ $$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Satz: $f: D \to \mathbb{C}$ ist in x_0 differenzierbar
$\Leftrightarrow$ es gibt eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so daß
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{h} = 0$$

<u>Beweis:</u> '$\Rightarrow$' wenn $f'(x_0)$ existiert, können wir $L(h) := f'(x_0)h$ setzen.

'$\Leftarrow$' wenn $L(h) := \ell h$, $\ell \in \mathbb{C}$

dann $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell$

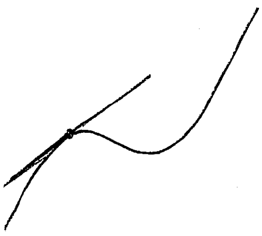
und deshalb $f'(x_0) = \ell$ ∎

<u>Bemerkungen:</u> ∘ dies bedeutet, daß

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)}$$

(lineare Approximation)

wobei $o(h) \to 0$ schneller als h mit $h \to 0$.



∘ wenn $f: D \to \mathbb{R}$ ist Differentialquotient

= Steigung der Tangente an den Grafen von f an der Stelle x_0

∘ ist $f: D \to \mathbb{R}$ in einer offenen Umgebung um x_0 definiert u. dort differenzierbar, und hat f bei x_0 ein lokales Extremum, dann ist $f'(x_0) = 0$

$\to$ Kandidaten für Extremstellen von $f: [a,b] \to \mathbb{R}$:

1) a und b
2) $\{x \in (a,b) \mid f'(x) \text{ existiert nicht}\}$
3) $\{x \in (a,b) \mid f'(x) = 0\}$

∘ über $\lim\limits_{h \nearrow 0}$ ($\lim\limits_{h \searrow 0}$) läßt sich Ableitung von links (rechts) definieren.

Korollar: f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

Beweis: $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$

$= f(x_0)$ $\square$

Beispiel: $f(x) = x^n,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow f' : x \mapsto n x^{n-1}$

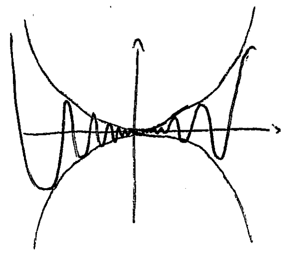
Beweis: $\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \overset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0} (x_0+h)^{n-1} + (x_0+h)^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}$

$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$

Def.:
- $C^n(D) := \{ f : D \to \mathbb{C} \mid f$ ist n-mal stetig diff.bar$\}$ für $n\in\mathbb{N}$
- $C^0(D) := \{ f : D \to \mathbb{C} \mid f$ ist stetig$\}$
- $C^\infty(D) := \{ f : D \to \mathbb{C} \mid f$ ist ∞-oft differenzierbar$\}$

Beispiel 1) „Brown'sche Bewegung" (Irrfahrt) ist stetig (also C^0) aber nicht differenzierbar.

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



ist differenzierbar, aber $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ist nicht stetig bei $x = 0$

2. Rechnen mit Ableitungen

Satz: Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ in $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(ii) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

(„Leibniz-" oder „Produktregel")

(iii) wenn $g(x) \neq 0$, dann ist $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$

(„Quotientenregel")

Beweis: (i) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

(ii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) g(x+h) - f(x) g(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) \right)$$

$$= f'(x) g(x) + g'(x) f(x)$$

(iii) z.z. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'}{g^2}(x)$; (iii) folgt dann aus (ii)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h) g(x)} \left(\frac{g(x) - g(x+h)}{h} \right)$$

$$= -\frac{g'}{g^2}(x)$$

$\square$

Beispiel: $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\{a\} \ni x \mapsto (x-a)^{-n}$

$f'(x) = -n (x-a)^{-(n+1)}$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$

Satz: (Kettenregel)

Wenn $f: \overset{\subseteq \mathbb{R}}{D_f} \to \mathbb{R}$, $g: \overset{\subseteq \mathbb{R}}{D_g} \to \mathbb{C}$ und $f'(x_0)$ sowie $g'(f(x_0))$ existieren, dann gilt

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)}$$

Beweis:

$$G(x) := \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(f(x_0))}{x - f(x_0)}, & x \in D_g \setminus \{f(x_0)\} \\[2ex] g'(f(x_0)), & x = f(x_0) \end{cases}$$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = G(f(x))\, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\to g'(f(x_0))\, f'(x_0) \quad \text{für } x \to x_0$$

$\square$

Satz: (Differentiation der Umkehrfunktion)

Wenn $f: D \to \mathbb{R}$ streng monoton ist und in x_0 diff.bar mit $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ diff.bar mit

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

Beweisidee: Für bel. Folgen $f(x_0) \neq y_n \to f(x_0)$ gilt:

$$x_n := f^{-1}(y_n) \to x_0$$

Deshalb:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x_0))}{y_n - f(x_0)} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\square$