TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

WS 11/12
Blatt 13
(30. Januar 2012)

Analysis 1

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für $\alpha > 0$ die Lösung $x = x(t)$ des folgenden Anfangswertproblems

$$\dot{x} = t\, x^{1+\alpha},$$
$$x(0) = x_0 > 0.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Lösung $x = x(t)$ des Anfangswertproblems zu der Differentialgleichung

$$\dot{x} = x \cdot (x - 1)$$

für

a) $x(0) = x_0 \notin \{0, 1\}$,

b) $x(0) = x_0 \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 3.

a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = \min\{y, 1\}.$$

b) Bestimmen Sie explizit die beiden Lösungen $y_1(x), y_2(x)$ mit den Anfangspunkten

$$P_1 := (0, -1), \qquad P_2 := (0, 1/e).$$

Aufgabe 4. Sei A eine $n \times n$ Matrix über dem Körper $\mathbb{C}$. Definiere

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Man sagt, dass eine Folge von Matrizen B_n gegen eine Matrix B konvergiert, falls die jeweiligen Einträge $(B_n)_{ij}$ gegen B_{ij} konvergieren. Man kann zeigen, dass die obige *Exponentialreihe* immer kovergiert.

1. Zeigen Sie, dass A und $\exp(A)$ kommutieren.
2. Sei die Matrix B invertierbar und diagonlisierbar. Zeigen Sie, dass $B = \exp(A)$ für eine Matrix A.
3. Stellen Sie die Drehmatrix $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ als $\exp(A)$ dar.
4. Man finde eine 2×2 Matrix, welche sich nicht als $\exp(A)$ schreiben lässt.