TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

Analysis 1

WS 11/12
Blatt 12
(20. Januar 2012)

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Schlömilchsches Restglied im Satz von Taylor

(a) *Verallgemeinerter Mittelwertsatz*
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und seien $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$ differenzierbar auf (a,b). Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$, sodass $(f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi)$. Ist zusätzlich $g' \neq 0$ auf (a,b), dann gilt

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Hinweis: Wenden Sie den Mittelwertsatz auf $\phi(x) := (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$ an.

(b) Sei $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass ein $\vartheta \in (0,1)$ existiert, sodass

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta\,(x-x_0))}{n!\,p}(1-\vartheta)^{n+1-p}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

Dies ist die *Schlömilchsche* Form des Restgliedes. Für $p = 1$ heisst es auch *Cauchysches* Restglied und für $p = n+1$ *Lagrangesches* Restglied.

Hinweis: Setzen Sie $G(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t)\,(x-t)^k/k!$ und $g(t) := (x-t)^p$. Benutzen Sie Aufgabenteil (a) für $(G(x)-G(x_0))/(g(x)-g(x_0))$ und $G(x) = g(x) = 0$ und $G(x_0) = R_{n+1}(x)$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für $0 < a \leq \pi$ die Fourierkoeffizienten der folgenden Funktionen:

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} a - |x|, & \text{wenn } |x| \leq a, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b)\quad f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha|x|}, & \text{wenn } |x| \leq a, \\ 0, & \text{sonst}\ , \end{cases} \qquad \text{wobei } \alpha > 0$$

$$c)\quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } |x| \leq a, \\ 0, & \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Aufgabe 3. Seien $f, g \in \mathcal{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und seien $(D_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$, $(T_y f)(x) = f(x+y)$. Zeigen Sie folgende Aussagen für die *Fouriertransformierte*:

$$a)\quad \widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha\hat{f} + \beta\hat{g} \qquad\qquad b)\quad \overline{\hat{f}(k)} = \hat{\bar{f}}(-k)$$

$$c)\quad \widehat{(D_\lambda f)}(k) = \lambda^{-1}\hat{f}(\frac{k}{\lambda}) \qquad\qquad d)\quad \widehat{(T_y f)}(k) = \hat{f}(k)e^{iky}.$$

Aufgabe 4. Seien $f, g \in \mathcal{R}$. Die Faltung von f und g ist definiert durch

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für die *Fouriertransformierte*:

$$a)\quad f \star g = g \star f$$

$$b)\quad \widehat{f \star g} = 2\pi\hat{f}\,\hat{g}$$