Stumpfe Winkel

Proseminar: Beweise aus dem Buch
am 27.6.2015
von Helene Weiß

1 Definitionen

1.1 Konvexe Polytope

Als konvexe Polytope bezeichnet man die konvexe Hülle (conv(S)) einer Punktmenge S= $\{s_1, ..., s_n\}$

$$P = conv(S) = \{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i s_i) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

1.2 Zentralsymmetrie

Ein Polytop p ist zentralsymmetrisch, falls gilt:

$$x \in P \Rightarrow -x \in P$$

2 Satz 1

Für jedes $d \geq 2$ gilt folgende Kette von Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
2^d &\leq \max \{\#S \mid S \subseteq \mathbb{R}^d, \sphericalangle(s_i, s_j, s_k) \leq \tfrac{\pi}{2} \textit{ für alle } \{s_i, s_j, s_k\} \subseteq S\} && (1)\\
&\leq \max \left\{ \#S \,\middle|\, \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d, \textit{ so dass } S \textit{ für je zwei Punkte } s_i, s_j \in S \\ (i \neq j) \textit{ in einem Streifen } S(i, j) \textit{ liegt, dessen parallele} \\ \textit{Begrenzungshyperebenen } s_i \textit{ bzw. } s_j \textit{ enthalten} \end{array} \right\} && (2)\\
&= \max \left\{ \#S \,\middle|\, \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d, \textit{ so dass die Translate } P - s_i \textit{ von } P := \\ conv(S) \textit{ einen Punkt gemeinsam haben, sich dort} \\ \textit{aber nur berühren} \end{array} \right\} && (3)\\
&\leq \max \left\{ \#S \,\middle|\, \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d, \textit{ so dass die Translate } Q + s_i \textit{ eines} \\ \textit{d-dimensionalen konvexen Polytops } Q \textit{ einander} \\ \textit{paarweise berühren} \end{array} \right\} && (4)\\
&= \max \left\{ \#S \,\middle|\, \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d, \textit{ so dass die Translate } Q^* + s_i \textit{ eines} \\ \textit{d-dimensionalen zentralsymmetrischen konvexen} \\ \textit{Polytops } Q^* \textit{ einander paarweise berühren} \end{array} \right\} && (5)\\
&\leq 2^d && (6)
\end{aligned}$$

Beweis

(1) für $S := \{0,1\}^d$. Sei $s_i, s_j, s_k \in$ S , da S symmetrisch kann angenommen werden $s_j = 0$

$\Rightarrow cos\sphericalangle(s_i, s_j, s_k) = \frac{\langle s_i, s_k \rangle}{|s_i||s_k|} \geq 0$

$\Rightarrow \sphericalangle(s_i, s_j, s_k) \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ nicht Stumpf

$\Rightarrow |S| = 2^d$ und enthält keinen stumpfen Winkel

(2) Sei $H_{ij} = \{x \in \mathbb{R} \mid \langle x, s_i - s_j \rangle = 0\}$

$\Rightarrow H_{ij} + s_i$ und $H_{ij} + s_j$ parallel und durch s_i, s_j

$\Rightarrow$ für x in dem Bereich zwischen $H_{ij} + s_i$ und $H_{ij} + s_j$ gilt:

$\sphericalangle(s_i, s_j, x)$ und $\sphericalangle(s_j, s_i, x)$ nicht stumpf

$\Rightarrow$ S liegt in dem Bereich

(3) P=conv(S) zwischen $H_{ij} + s_j$ und $H_{ij} + s_i \Leftrightarrow P - s_i$ und $P - s_j$ in verschiedenen Halbräumen bzgl. H_{ij}

$\Rightarrow$ $P - s_i$ und $P - s_j$ schneiden sich nicht im inneren, aber berühren sich sicher im Nullpunkt

(4) Da von (3) $\rightarrow$ (4) die Aussagen abgeschwächt werden, folgt " $\leq$ "

(5) " $\geq$ " ist trivial. Zu " $\leq$ ":

Sei $Q^* := \{\frac{1}{2}(x - y) \in \mathbb{R}^d : x, y \in Q\} \Rightarrow Q^*$ d-dimensional, konvex und zentralsymmetrisch

$Q + s_i$ und $Q + s_j$ berühren einander $\Leftrightarrow Q^* + s_i$ und $Q^* + s_j$ berühren einander

da: $(Q^* + s_i) \cap (Q^* + s_j) \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \exists q_i^{'}, q_i^{''}, q_j^{'}, q_j^{''} \in Q : \frac{1}{2}(q_i^{'} - q_i^{''}) + s_i = \frac{1}{2}(q_j^{'} - q_j^{''}) + s_j$

$\Leftrightarrow \exists q_i^{'}, q_i^{''}, q_j^{'}, q_j^{''} \in Q : \frac{1}{2}(q_i^{'} + q_j^{''}) + s_i = \frac{1}{2}(q_j^{'} + q_i^{''}) + s_j$

$\Leftrightarrow \exists q_i, q_j \in Q : q_i + s_i = q_j + s_j$

$\Leftrightarrow (Q + s_i) \cap (Q + s_j) \neq \emptyset$

(6) Sei x$\in (Q^* + s_i) \cap (Q^* + s_j)$

$\Rightarrow x - s_i \in Q^*$ und $x - s_j \in Q^*$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(s_i + s_j) \in Q^* + s_j$

mit P:=conv(S) und $P_j := \frac{1}{2}(P + s_j)$ =conv$\{\frac{1}{2}(s_i + s_j) \mid s_i \in S\} \subseteq Q^* + s_j$

$\Rightarrow P_j$ können sich höchstens berühren

Da P konvex $\Rightarrow s_i, s_j$ und $\frac{1}{2}(s_i + s_j)$ in P $\Rightarrow P_j$ in P

vol(P_j) $= \frac{1}{2^d}$vol(P) (da P_j um Faktor $\frac{1}{2}$ verkleinerte Translate von P)

$\Rightarrow$ höchstens 2^d Mengen P_j passen in P

$\Rightarrow |S| \leq 2^d$ $\square$

3 Satz 2

Für jedes $d \geq 2$ gibt es eine Menge S von $2\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9}(\frac{2}{\sqrt{3}})^d \rfloor$ Punkten in $\{0,1\}^d$ (Ecken des d-dimensionalen Einheitswürfels), in der nur spitze Winkel auftreten.

Beweis
Sei m:= $\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9}(\frac{2}{\sqrt{3}})^d \rfloor$ und wähle:
$x(1), x(2), \ldots, x(3m) \in \{0,1\}^d$
unabhängig und zufällig mit p= $\frac{1}{2}$.
x(i),x(j),x(k) bestimmen rechten Winkel $\Leftrightarrow \langle x(i) - x(j), x(k) - x(j) \rangle = 0$
$\Rightarrow x(i)_l - x(j)_l$ =0 oder $x(k)_l - x(j)_l$ =0 für alle Koordinaten l (nenne (i,j,k) schlechtes Tripel)
$\Rightarrow$ ein Tripel ist mit Wahrscheinlichkeit p= $(\frac{3}{4})^d$ schlecht Es sind $3\binom{3m}{3}$ Tripel zu betrachten
$\Rightarrow$ erwartete Anzahl der schlechten Tripel: $3\binom{3m}{3}(\frac{3}{4})^d$
$\Rightarrow$ Es gibt mindestens eine Möglichkeit 3m Vektoren zu wählen, so dass es höchstens $3\binom{3m}{3}(\frac{3}{4})^d$ schlechte Tripel gibt

$$\Rightarrow 3\binom{3m}{3}(\tfrac{3}{4})^d < 3\frac{(3m)^3}{6}(\tfrac{3}{4})^d = m^3(\tfrac{9}{\sqrt{6}})^2(\tfrac{3}{4})^d \leq m$$

$\Rightarrow$ nicht mehr als m schlechte Tripel
$\Rightarrow$ Es können m der 3m Vektoren x(i) weggelassen werden, so dass die übrigen 2m Vektoren kein schlechtes Tripel enthalten $\square$