Proseminar "Beweise aus dem Buch"
Laurin Wagner

Der Kontangens und der Herglotz-Trick

1 Worum Geht es?

Es geht um die Partialbruchzerlegung des Kotangens ($\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$) die Euler 1748 in seinem Buch *Introductio in Analysin Infinitorum* bewies :

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}) \ , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

oder ein wenig kompakter

$$\pi \cot \pi x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}. \tag{1}$$

2 Beweis

Folgende Idee (1) zu zeigen stammt von Gustav Herglotz und ist gemeinhin als der Herglotz-Trick bekannt. Man definiere

$$f(x) := \pi \cot \pi x \qquad\qquad g(x) := \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

Unsere Arbeit liegt nun darin gewisse gemeinsame Eigenschaften von f und g zu zeigen um so auf die Gleichheit der beiden Funktionen zu schließen

2.1 Stetigkeit für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

1. $f(x) = \pi \cot \pi x$ ist als Verkettung stetiger Funktionen auf allen nicht ganzzahligen Werten Stetig

2. Mit der Umformung $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{(x-n)+(x+n)}{x^2-n^2} = \frac{-2x}{n^2-x^2}$ folgt für g:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}. \tag{2}$$

   Aus Analysis wissen wir, dass unter gleichmäßiger Konvergenz die Stetigkeit einer Funktionenfolge auf die Grenzfunktion übertragen wird. In unsrem Fall bedeutet dies, dass die wir die gleichmäßige Konvergenz der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2-x^2}$ für jedes $x \notin \mathbb{Z}$ in einer Umgebung von x zu zeigen haben :

- Für den ersten Term, $n = 1$, oder mit den Summanden $2n - 1 \leq x^2$ bleibt die Reihe beschrä"nkt da es nur endlich viele solcher Summanden gibt
- Für $n \geq 2$ und $2n - 1 > x^2$ gilt $n^2 - x^2 > (n-1)^2 > 0$, so dass man nun durch die Abschätzung

$$0 < \frac{1}{n^2 - x^2} < \frac{1}{(n-1)^2}$$

die Majorante $\frac{1}{(n-1)^2}$ bekommt welche sowohl für x als auch in einer Umgebung von x gilt. Nun wissen wir, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$, daraus folgt die gleichmäßige konvergenz. $\square$

2.2 f und g sind Periodisch mit Periode 1

Wir zeigen nun das gilt: $f(x+1) = f(x)$ und $g(x+1) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. Der Kotangens besitzt die Periode π, also hat f die Periode 1.
2. Definiere

$$g_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

Nun gilt:

$$g_N(x+1) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n+1} = \sum_{n=-(N-1)}^{N+1} \frac{1}{x+n} = g_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1}$$

Mit $N \to \infty$ ist die Aussage bewiesen. $\square$

2.3 f und g sind Ungerade Funktionen

Wir müssen also zeigen: $f(-x) = -f(x)$ und $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. Für f folgt die Eigenschaft, da der Sinus ungerade und der Cosinus gerade ist.
2. Für g reicht es (aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von g_N gegen g) zu zeigen, dass $g_N(-x) = -g_N(x)$ gilt was sofort aus der Definition von $g_N(x)$ folgt. $\square$

2.4 f und g Erfüllen dieselbe Funktionalgleichung

Wir zeigen: $f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) = 2f(x)$ und $g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2}) = 2g(x)$.

1. Für f erhalten wir die Aussage durch die Additionstheoreme für Sinus- und Kosinusfunktion: Wir benutzen hierfür:
   (a) $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$
   (b) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
   (c) $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$
   (d) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

2. Für g rechnet man nach:

$$g_N(\frac{x}{2}) + g_N(\frac{x+1}{2}) = 2g_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}$$

Mit $N \to \infty$ folgt erhält man das gewünschte.

□

Definiere

$$h(x) := f(x) - g(x) = \pi \cot \pi x - (\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}) \tag{3}$$

2.5 Beweis von h(x) = 0 für alle $x \in \mathbb{Z}$

Mit $h(x) := 0$ für $x \in \mathbb{Z}$, wird h eine stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ die die Eigenschaften **2.1,2.2,2.3 und 2.4** von g und f erbt

h ist vorerst nur stetig auf $\mathbb{R}\diagdown\mathbb{Z}$. Ob sich h stetig auf den ganzen Zahlen fortsätzen lässt verrät uns das zweimalige Andwenden der L'Hospital'schen Regeln.

$$\lim_{x\to 0} (\cot x - \frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x} = 0$$

Also auch:

$$\lim_{x\to 0} (\pi \cot \pi x - \frac{1}{x}) = 0$$

Für die verbliebene Summe gilt:

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = 0$$

Insgesamt wegen der Periodizität (Periode 1) also:

$$\lim_{x\to n} h(x) = 0 \qquad \textit{für}\ \textbf{alle}\ n \in \mathbb{Z}$$

Also lässt sich h zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktion fortsätzen □

2.6 Der Herglotz-Trick

Wir fügen nun alle bisherigen Resultate zusammen und erhalten: Die Funktion h ist *periodisch* und stetig, folglich existiert das Maximum m und wird auch angenommen. Betrachte ein beliebiges Intervall der Länge 1, z.B. $[0, 1]$. Sei x_0 ein Punkt aus diesem Intervall, so dass $h(x_0) = m$. Aus der Funktionalgleichung folgt

$$h(\frac{x_0}{2}) + h(\frac{x_0+1}{2}) = 2m$$

und da sowohl $h(\frac{x_0}{2}) \leq m$ als auch $h(\frac{x_0+1}{2}) \leq m$, muss $h(\frac{x_o}{2}) = m$ gelten.
Iteration gibt $h(\frac{x_o}{2^n}) = m$. Für $n \to \infty$ gilt wegen der Stetigkeit $h(0) = m$. Da nun aber $h(0) = 0$, gilt $m = 0$, also $h(x) \leq 0$ für alle x $\in \mathbb{R}$.
Nun ist h aber eine *ungerade* Funktion, also ist $h(x) < 0$ ebenfalls nicht möglich. Wir bekommen demnach $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist der Beweis fÃ$\frac{1}{4}$r die Partialbruchzerlegung des Kotangens erbracht. □

3 Eine Anwendung

Eine der berühmtesten Folgerungen aus der Partialbruchzerlegung des Kotangens betrifft die Werte der *Riemannschen Zeta-Funktion* in geraden positiven Zahlen:

$$\zeta(2k) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{4}$$

Multipliziert man Gleichung (2) mit x und substituiert $y = \pi x$, so ergibt sich:

$$y \cot y = 1 - 2\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2} = 1 - 2\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1-(\frac{y}{\pi n})^2}$$

Der letzte Term entspricht dem Wert einer Geometrischen Reihe, damit gilt dann:

$$y \cot y = 1 - 2\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} (\frac{y}{\pi n})^{2k} = 1 - 2\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{\pi^{2k}} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}) y^{2k}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir für den Koeffizienten von y^{2k} von $y \cot y$

$$[y^{2k}] y \cot y = -\frac{2}{\pi^{2k}} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k) \tag{5}$$

für alle k $\in \mathbb{N}$:

4 Quellenverzeichnis

- M.Aigner und G.M.Ziegler: "Das Buch der Beweise", 4. Auflage, Springer-Verlag 2015