Ein Quadrat und viele Dreiecke

Deborah Schmidhammer

28.06.2015

Satz von Monsky: *Es ist unmöglich, ein Quadrat in eine ungerade Anzahl von Dreiecken zu zerlegen.*

Grundbegriffe

Eine nicht-archimedische reelle Bewertung eines Körpers K ist eine Funktion $v : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die für alle $x, y \in K$ folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(ii) $v(xy) = v(x)v(y)$ und
(iii) $v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$. *(nicht-archimedische Eigenschaft)*

Es gilt:

(iv) $v(x + y) = \max\{v(x), v(y)\}$, falls $v(x) \neq v(y)$.

Beweis: Sei o.B.d.A. $v(x) < v(y)$

$$\Longrightarrow v(y) = v((x + y) - x) \leq \max\{v(x + y), v(x)\} = v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\} = v(y)$$

$$\Longrightarrow v(x + y) = v(y) = \max\{v(x), v(y)\}.$$

□

Es folgt $v(1) = 1$, $v(-x) = v(x)$ und $v(x^{-1}) = v(x)^{-1}$ für alle nicht-archimedischen Bewertungen.

Ist p eine Primzahl und $r \neq 0$ eine rationale Zahl, so kann r eindeutig durch

$$r = p^k \frac{a}{b}, \qquad k \in \mathbb{Z}, b > 0, a, b \text{ teilerfremd zu } p,$$

beschrieben werden. Die *p-adische Bewertung* ist definiert durch

$$|r|_p := p^{-k}, |0|_p = 0.$$

Sie erfüllt offensichtlich (i) und (ii), wir zeigen (iii):
Es sei $r = p^k \frac{a}{b}$ und $s = p^l \frac{a}{b}$ und o.B.d.A. $k \geq l, \Rightarrow |r|_p = p^{-k} \leq p^{-l} = |s|_p$.

$$\Longrightarrow |r + s|_p = \left| p^k \frac{a}{b} + p^l \frac{c}{d} \right|_p = \left| p^l \left(p^{k-l} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \right|_p$$

$$\overset{(ii)}{=} p^{-l} \left| \frac{p^{k-l}ad + bc}{bd} \right|_p \leq p^{-l} = \max\{|r|_p, |s|_p\}.$$

□

Monskys Idee war es, die 2-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$ zu einer Bewertung auf $\mathbb{R}$ zu erweitern. Allerdings reicht es, eine Bewertung v auf $\mathbb{R}$ mit Werten in einer beliebig geordneten Gruppe zu betrachten, welche die Bedingung $v(\frac{1}{2}) > 1$ erfüllt. Für solche Bewertungen gilt $v(\frac{1}{n}) = v(n) = 1$ für ungerade $n \in \mathbb{Z}$ und $v(2n) < 1$ für $n \in \mathbb{Z}$.

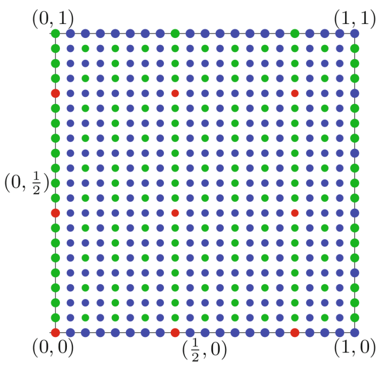
Die Erweiterung einer nicht-archmideischen Bewertung von einem Körper K zu einem Körper L, der K enthält ist immer möglich. Im Anhang des Kapitels „Ein Quadrat und viele Dreiecke“ wird etwas weniger gezeigt - aber genug für die Anwendung auf Zerlegungen in ungerade viele Dreiecke.

Beweis für den Satz von Monsky

Wir konstruieren eine spezielle 3-Färbung der Ebene und zeigen dann, dass der v-Wert der Fläche jedes Dreiecks, dessen Ecken drei verschiedene Farben haben, größer als 1 ist. Daraus folgt, dass die Fläche ungleich $\frac{1}{n}$ sein muss. Anschließend zeigen wir, dass es in jeder Zerlegung des Quadrates mindestens ein solches *Regenbogendreieck* gibt.

Färbung des Dreiecks

Wir betrachten das Tripel $(x, y, 1)$ und den maximalen v-Wert der einzelnen Koordinaten. Die Farbe des Punktes (x, y) hängt davon ab, wann das Maximum das erste Mal auftritt.



Beispiel mit 20 Unterteilungen

$$(x, y) \text{ wird } \begin{cases} \text{blau} & \text{falls } v(x) \geq v(y), v(x) \geq v(1), \\ \text{grün} & \text{falls } v(x) < v(y), v(x) \geq v(1), \\ \text{rot} & \text{falls f } v(x) < v(y), v(x) < v(1). \end{cases}$$

Lemma 1: *Für jeden blauen Punkt $p_b = (x_b, y_b)$, grünen Punkt $p_g = (x_g, y_g)$ und roten Punkt $p_r = (x_r, y_r)$ gilt $v(det(M)) \geq 1$, wobei*

$$M := \begin{pmatrix} x_b & y_b & 1 \\ x_g & y_g & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Die Determinante ist die Summe aus sechs Termen. Der erste Summand ist das Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen, also $x_b y_g 1$. Diese Einträge sind jeweils der Maximalwert in ihrer Zeile. Damit gilt:

$$v(x_b y_g 1) \stackrel{(ii)}{=} v(x_b)v(y_g)v(1) \geq v(1)v(1)v(1) \geq 1.$$

In jedem der anderen fünf Summanden ist mindestens ein Faktor, der echt kleiner ist als einer der drei Einträge auf der Hauptdiagonalen. Somit ist der erste Summand echt größer als die anderen. Es folgt mit (iv):

$$v(det(M)) = v(x_b y_g 1) \geq 1.$$

$\square$

Folgerung: *Auf jeder Geraden der Ebene gibt es höchstens zwei verschiedene Farben. Die Fläche eines Regenbogendreiecks kann nicht 0 sein und auch nicht $\frac{1}{n}$ für ungerades n.*

Beweis: Die Fläche F eines Regenbogendreiecks ist

$$F = \pm\frac{1}{2}((x_b - x_r)(y_g - y_r) - (x_g - x_r)(y_b - y_r)) = \pm\frac{1}{2}det(M).$$

Würden alle drei Punkte des Dreiecks auf einer Geraden liegen (also $F = 0$), dann wäre

$$v(det(M)) = v\,(2F) \overset{(ii)}{=} v(2)v(0) \overset{(i)}{=} 0 < 1.$$

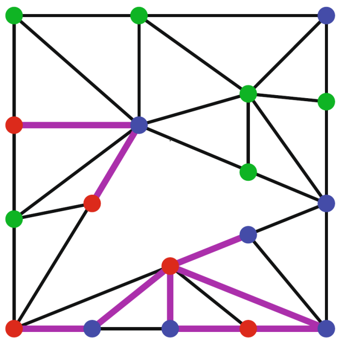
Wäre $F = \frac{1}{n}$ mit n ungerade, dann würde gelten:

$$v(det(M)) = v\left(\frac{2}{n}\right) \overset{(ii)}{=} v(2)v\left(\frac{1}{n}\right) < 1.$$

Beide Fälle widersprechen Lemma 1. $\square$

Zerlegung des Quadrats

Lemma 2: *Jede Zerlegung des Einheitsquadrates $S = [0,1]^2$ in endlich viele Dreiecke (also insbesondere in flächengleiche) enthält eine ungerade Anzahl von Regenbogendreiecken und damit mindestens eins.*



Beweis: Wir betrachten eine beliebige Zerlegung. Ein Segment zwischen einer roten und blauen Ecke färben wir violett. Es gelten folgende zwei Überlegungen:

1. Der untere Rand des Quadrats enthält eine ungerade Anzahl von violetten Segmenten, da $(0,0)$ rot und (1,0) blau ist. Mit der Folgerung von Lemma 1 ist jede Ecke auf der Geraden entweder blau oder rot. Also ergibt sich eine ungerade Anzahl von Farbwechseln zwischen rot und blau und somit eine ungerade Anzahl von violetten Segmenten.

2. Jedes Regenbogendreieck enthält eine ungerade Anzahl von violetten Segmenten in seinem Rand, während ein höchstens zweifarbiges Dreieck eine gerade Anzahl entält. Das gilt, da aus 1. folgt, dass es zwischen einer roten und einer blauen Ecke eine ungerade Anzahl an violetten Segmenten gibt. Ein Regenbogendreieck besitzt nur eine solche Kante und jedes andere Dreieck keine oder zwei.

Wenn wir nun die Anzahl der violetten Segmente im Rand aller Dreiecke addieren, werden die im Inneren zweimal gezählt. Da nur der untere Rand von S violette Segmente enthält, muss die Anzahl ungerade sein. Somit enthält jede Zerlegung ein Regenbogendreieck. $\square$

Literatur

[AZ15] M.Aigner und G.M.Ziegler: „Das Buch der Beweise", 4. Auflage, Springer-Verlag 2015, Kapitel 22 „Ein Quadrat und viele Dreiecke"