TU München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Physik
WS 2012/2013

Prof. Dr. Silke Rolles
Dr. Christian Döbler

Themenauswahl für den ersten Teil der Vorlesung Fallstudien der mathematischen Modellbildung [MA2902]

Ausgabe: 25. Februar 2013

Thema 1. *Der Satz von Rényi*
Das Ziel dieses Themas ist es, den Satz von Rényi ausführlich vorzustellen und zu beweisen. Eine moderne, allgemeine Version des Satzes samt Beweis finden Sie in Abschnitt 3.4 des Buches [1]. Konkret sollte Ihre Arbeit die folgenden Punkte beinhalten:

(1) Formulierung und Vergleich der historischen Aussage (siehe weiter unten) und der heutigen Version des Satzes

(2) ausführlicher Beweis der heutigen Version des Satzes (siehe etwa [1], Abschnitt 3.4)

(3) Folgerungen aus dem Satz und deren Bedeutung für Anwendungen, insbesondere aus dem Bereich der Modellbildung

ursprünglicher Satz von Rényi: Sei $\Pi \subseteq \mathbb{R}$ eine zufällige Punktmenge und sei μ ein atomloses Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, welches endlich auf Intervallen endlicher Länge ist, so dass die folgende Eigenschaft gilt: Bezeichnet $\mathcal{J}$ das System aller endlichen Vereinigungen von disjunkten Intervallen der Gestalt $(a, b]$, wobei $a < b$ reelle Zahlen sind, und gilt für alle $A \in \mathcal{J}$, dass $N(A) := |\Pi \cap A|$ die $Poisson(\mu(A))$-Verteilung besitzt, so ist Π ein Poisson-Prozess auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Intensitätsmaß μ.

Thema 2. *eindimensionale Poisson-Prozesse*
In diesem Thema soll man sich intensiv mit eindimensionalen Poisson-Prozessen auseinandersetzen.

(1) Stellen Sie das sogenannte Wartezeitparadoxon (oder auch Inspektionsparadoxon) im Rahmen eindimensionaler, homogener Poisson-Prozesse vor und lösen Sie dieses ausführlich auf. Dieses Paradoxon findet sich in vielen Lehrbüchern über Wahrscheinlichkeitstheorie, etwa in [2] (Abschnitt 4.2), in [3] (Abschnitt 13.3) oder in [4] (Abschnitt 1.4).

(2) Beschreiben Sie das in Abschnitt 4.3 in [1] vorgestellte $M/M/1$-Modell aus der Theorie der Warteschlangen und leiten Sie die sogenannten Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen für die Wahrscheinlichkeit $p_n(t)$, dass sich zum Zeitpunkt $t > 0$ genau n Leute in der Schlange befinden, her. Lösen Sie diese im Fall $n = 0$ mit Hilfe der Laplace-Transformierten wie in [1] beschrieben. Gehen Sie schließlich auf das asymptotische Verhalten ($t \to \infty$) der Länge der Warteschlange ein und beweisen Sie (evtl. heuristisch) Theorem (8) oder alternativ Formel (10) aus Abschnitt 11.2 des Buches [5].

Bemerkung: Sie dürfen für den letzten Teil von (2) sämtliche Aussagen aus der Theorie der zeitstetigen Markov-Prozesse, die für den Beweis benötigt werden, voraussetzen.

Thema 3. *Erneuerungsprozesse*
Die Klasse der Erneuerungsprozesse verallgemeinert die der homogenen Poisson-Prozesse auf der Zeitachse $[0, \infty)$ und spielt in vielen Anwendungen eine große Rolle. So lassen sich zum Beispiel die Zeitpunkte, zu denen ein defektes Teil an einer Maschine ersetzt wird, als Erneuerungsprozess beschreiben. Die Aufgabe bei diesem Thema ist es, wesentliche Bestandteile der Theorie der Erneuerungsprozesse, wie sie zum Beispiel in Abschnitt 8.3 und Kapitel 10 des Buches [5] dargestellt ist, vorzustellen und anhand eines Anwendungsbeispiels die praktische Relevanz zu verdeutlichen. Bei der Darstellung der Theorie sollte man immer wieder auf den Spezialfall der homogenen Poisson-Prozesse zurückkommen.

Literatur

[1] Kingman - Poisson Processes, Oxford Science Publications, 1993

[2] Georgii - Stochastik, 4. Auflage, de Gruyter, 2009

[3] Dehling, Haupt - Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik, 2. Auflage, Springer, 2004

[4] Feller - An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume 2, 2nd Edition, Wiley, 1971

[5] Grimmett, Stirzaker - Probability and Random Processes, 3rd Edition, Oxford, 2001

Bemerkung: Die hier angegebene Literatur befindet sich im Semesterapparat von Prof. Rolles.