....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur Funktionentheorie MA2006 und MA2008

Prof. Dr. M. Wolf

21. September 2015, 13:00 – 14:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **5** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **60** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Komplexe Kurvenintegrale** **[8 Punkte]**
Gegeben ist die Menge $G := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0,\ (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z - 1)^2 \leq 1\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge G

(b) Geben Sie unter Beachtung der Umlaufrichtung eine Parametrisierung von ∂G durch zwei Kurvenstücke an.

$\gamma_1(t) =$	$\gamma_2(t) =$

(c) Berechnen Sie (mit kurzer Begründung) den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{4z - \pi - 4\mathrm{i}} \mathrm{d}z$.

$$\int_{\partial G} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{4z - \pi - 4\mathrm{i}} \mathrm{d}z =$$

2. **Logarithmus einer holomorphen Funktion** **[6 Punkte]**

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $L : U \to \mathbb{C}$ gibt, mit $f(z) = \mathrm{e}^{L(z)}$ für alle $z \in U$.
Hinweis: Was muss für die Ableitung einer solchen Funktion L gelten?

3. **Residuen** **[9 Punkte]**

Sei $f(z) = \dfrac{z^2 - \pi^2}{\sin z}$.

(a) Geben Sie alle isolierten Singularitäten von f an und klassifizieren Sie sie.

(b) Welchen Wert hat das Residuum von f bei $z = 0$?

(c) Wie lautet der Hauptteil von f in einer Umgebung von $z = 0$?

(d) Welchen Konvergenzradius hat der Nebenteil der Laurent-Reihe von f um $z = 0$?

4. **Satz von Rouché** **[5 Punkte]**

Sei $p(z) = z^5 + q(z)$ wobei q ein Polynom von höchstens 4. Grade ist. Zeigen Sie, dass es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt mit $|z| = 1$ und $|p(z)| \geq 1$.
HINWEIS: Satz von Rouché

5. **Residuenkalkül** **[16 Punkte]**

Beweisen Sie, dass $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^5+1}\mathrm{d}x = \frac{\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}$.

HINWEIS: Integrieren Sie entlang des Randes von $G := \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z \in [0, \frac{2\pi}{5}],\ |z| \leq R\}$ und betrachten Sie den Limes $R \to \infty$.