. . . .
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
$\sum$		

I . . . .
Erstkorrektur

II . . . .
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Funktionentheorie
MA2006 und MA2008

Prof. Dr. M. Wolf

29. Juli 2015, 15:00 – 16:00 Uhr

Hörsaal: . . . . Reihe: . . . . Platz: . . . .

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **5** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **60** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von . . . . bis . . . .

Vorzeitig abgegeben um . . . .

Besondere Bemerkungen:

1. **Cauchy-Riemann Differentialgleichungen** **[8 Punkte]**

Bestimmen sie jeweils in (a) und (b) mit Begründung alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $\operatorname{Re}\left(f(x + \mathrm{i}y)\right) = \mathrm{e}^{-y}x$,

(b) $\operatorname{Re}\left(f(x + \mathrm{i}y)\right) = \mathrm{e}^{-y}\sin x$.

2. **Kurvenintegral** **[6 Punkte]**

Berechnen Sie für $n \in \mathbb{Z}$ das Integral $\int\limits_0^{2\pi} \exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - n\mathrm{i}t)\mathrm{d}t$.

3. **Satz von Liouville** **[7 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \mathbb{C}$. Für die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, gelte $\lim\limits_{|z|\to\infty} g(z) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass g eine hebbare Singularität bei z_0 hat.

(b) Zeigen Sie, dass g beschränkt ist.

(c) Was folgt daraus für f, wenn $f(0) = 0$ ist?

4. **Gebietstreue** **[5 Punkte]**

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Nimmt die Funktion $\mathrm{Im}\,(f)$ in $z_0 \in G$ ihr Maximum an, so ist f konstant.

5. **Anwendung des Residuensatzes** **[14 Punkte]**

Sei $f(z) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

(b) Berechnen Sie das Residuum von f an der Stelle $\frac{\mathrm{i}\pi}{2}$.

(c) Berechnen Sie nun das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \mathrm{d}x$.
HINWEIS: Betrachten Sie das Kurvenintegral entlang des Randes des Rechtecks $Q := \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}, \mid x \in [-R, R], y \in [0, \pi]\}$ im Limes $R \to \infty$.