PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

**Funktionentheorie**
**MA2006/MA2008**

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2015S

Sommersemester 2015
Blatt 12
(7.7.2015)

## Hausaufgaben

### H12.1. Residuenkalkül

Sei $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ mit $0 < \alpha < 1$.

(a) Berechnen Sie das Residuum von $f(z)$ bei $z = i\pi$.

(b) Welchen Wert hat $\int\limits_{\partial Q_R} f(z)dz$ für $Q_R := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [-R, R],\ y \in [0, 2\pi]\}$, $R > 0$?

(c) Zeigen Sie, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

HINWEIS: Benutzen Sie, dass $|f(x + iy)| \leq \frac{e^{\alpha x}}{|1-e^x|} \to 0$ für $|x| \to \infty$.

### H12.2. Die Cayley-Transformation

Die Abbildung $C : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ heißt Cayley-Transformation.

(a) Wie lautet ihre Umkehrabbildung?

(b) $C$ bildet $i\mathbb{R}_0^+$ bijektiv auf $[-1, 1[$ ab.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} + iY$, $Y \neq -1$, durch $C$ jeweils auf einen Kreis abgebildet wird.
HINWEIS: Man eliminiere in Real- und Imaginärteil von $u+iv = C(x+iY)$ die Variable $x$ und identifiziere den Kegelschnitt.

### H12.3. Satz von Liouville und Identitätssatz

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Beweisen Sie:

(a) Gilt $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist $f$ konstant.

(b) Gilt $f(z) = f(z^2)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist $f$ konstant.

HINWEIS: zu (a): 0 ist isolierte Singularität; zu (b): 1 ist ein Häufungspunkt in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

**Hausaufgabenabgabe:** Dienstag, 14.7.2015, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude
Die Abgabe ist freiwillig. Die Hausaufgaben werden nicht korrigiert, können aber gegebenenfalls als "sinnvoll bearbeitet" gewertet werden.